

Examen de Mathématiques : contrôle 1

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits, seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée. Toute sortie est définitive.

Barème indicatif : 4+4+5+8

Exercice 1 : Racines carrées d'un complexe.

Déterminer les racines carrées du nombre complexe :

$$Z = 2 + 2\sqrt{3}i$$

Vérifier les résultats obtenus.

Exercice 2 : Polynômes

Soit le polynôme :

$$P(X) = 4X^3 - 6X^2 + 2X - 3$$

1. Développer et simplifier $Q(X) = P(X + \frac{1}{2})$ sachant que l'on a :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

2. Factoriser $Q(X)$ dans \mathbb{R} .

3. En déduire la factorisation de $P(X)$ dans \mathbb{R} .

Exercice 3 : Fraction rationnelle

On considère les polynômes :

$$P(X) = 2X^5 + 3X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 6X + 1 \quad \text{et} \quad Q(X) = X^3 + 2X^2 + X$$

1. Poser la division euclidienne de $P(X)$ par $Q(X)$.

2. Vérifier le résultat obtenu en calculant $P(1)$ de deux façons différentes.

3. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

Exercice 4 : Étude de fonction

Soit la fonction d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{e^{2x+1}}{2x-1}$$

et \mathcal{C} sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de f .

2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

3. En déduire le tableau de variations de f .

4. Calculer les limites de f aux bornes du domaine et étudier les branches infinies.

5. En plaçant tous les éléments remarquables, tracer la courbe \mathcal{C} .

6. Montrer que l'on peut trouver une constante k telle que :

$$f(x) = k \cdot \frac{e^{2x}}{1-2x}$$

7. En déduire le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.