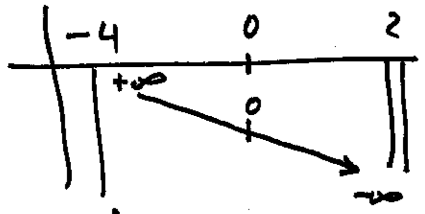
Examen de Mathématiques 2015.

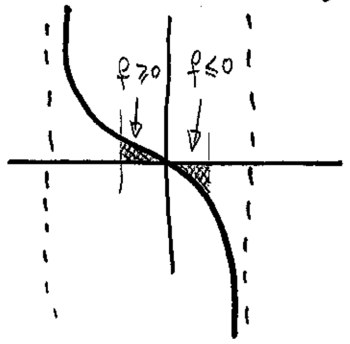
Exo 1 : 1) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x-8}$ $\quad f'(x) = \dfrac{1\,(x^2+2x-8)-(2x+2)x}{(x+4)^2(x-2)^2} = \dfrac{-x^2-8}{(x+4)^2(x-2)^2} < 0.$

f est décroissante sur l'intervalle $]-4,2[$.



2) Pour $x \in]-4;2[$ $\quad (x+4)(x-2) < 0$ et $f(x)$ est du signe opposé à x.

3) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$



Commençons par effectuer une décomposition en éléments simples $\dfrac{X}{(X+4)(X-2)} = \dfrac{a}{X+4} + \dfrac{b}{X-2}$.

on obtient alors $a = \dfrac{2}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\Big[2\ln(x+4) + \ln|x-2|\Big]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 5^2$$
$$= \frac{1}{3}\Big[2\ln 5 + \ln 1 - 2\ln 4 - \ln 2\Big] = \frac{1}{3}\ln\left[\frac{25}{32}\right] \leqslant 0$$

4) Aire $= \displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\Big[2\ln(x+4) + \ln|x-2|\Big]_{-1}^0 - \frac{1}{3}\ln\frac{25}{32}$
$$= \frac{1}{3}\left(\ln 4^2 + \ln 2 - 2\ln 3 + \ln 3\right) = \frac{1}{3}\left(\ln 2^5 - \ln 3 + \ln 32 - \ln 25\right) = \frac{10\ln 2 - \ln 3 - 2\ln 5}{3}.$$

Exo 2 : Pour intégrer une fraction rationnelle, on commence par l'écrire sous forme de somme d'éléments simples.

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{(x+1)} + \frac{c}{(x+1)^2}$$

en multipliant par x puis $x=0$ on trouve $a = 1$

$(x+1)^2$ ——— $= -1$ ——— $c = -2$

x puis en regardant $x \to \infty$ $\quad b = 0$.

$$I = \int_1^2 \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2}\,dx = \left[\ln|x| + \frac{2}{x+1}\right]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{3}$$

Dans J on pose $t = x^2$ $\quad dt = 2x\,dx$ $\quad x=1 \Leftrightarrow t=1$, $x=2 \Leftrightarrow t=4$ $\quad J = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2(x+1)^2}\,2x\,dx = 2I$

Exo 3. $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -6 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12$ $\qquad \Delta = 49-48 = 1$ $\qquad \lambda = \dfrac{7\pm1}{2} = {3 \atop 4}$

$A - 3I = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A-3I)$ donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à 3

$A - 4I = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A-4I)$ donc $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ——— 4

Finalement $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

avec f l'application linéaire de matrice A dans la base canonique

P la matrice de passage de la base canonique à la base $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et

D la matrice de f dans la base de vecteurs propres $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

B la matrice d'une application linéaire f dans la base canonique

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 7 & 1-\lambda & -3 \\ -4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 12 - \left[-6(1-\lambda) + 7(3-\lambda)\right]$$
$$= (\lambda^2-2\lambda+1)(3-\lambda) + 12 + 6 - 6\lambda - 21 + 7\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 - 3 + \lambda = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda \quad = -\lambda(\lambda^2-5\lambda+6) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Donc B possède 3 valeurs propres de multiplicité 1, pour toute valeur propre λ $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant 1$ donc E_λ est une droite vectorielle, et B est diagonalisable, cherchons une base de vecteurs propres.

$BU = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 7x + y - 3z = 0 \\ -4x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -4x + 2y + 3z = 0 & L_2 \\ 3x + 3y = 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -6x + 3z = 0 \end{cases}$

$\vec{U_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est une valeur propre associée à la valeur propre 0.

$BU = 2U \Leftrightarrow (B-2I)U = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 7x - y - 3z = 0 \\ -4x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 5x + 5y = 0 \\ -4x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases}$

$\vec{U_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.

$BU = 3U \Leftrightarrow (B-3I)U = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 7x - 2y - 3z = 0 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 3x - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

$\vec{U_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

La matrice de passage P de la base canonique à la base de vecteurs propres $(\vec{U_1}, \vec{U_2}, \vec{U_3})$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice de f dans la base $(\vec{U_1}, \vec{U_2}, \vec{U_3})$ est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

D'après un théorème du cours on a ~~relation~~ $B = PDP^{-1}$

Exo 3 : $f(x,y,z) = (3x - y - 4z;\ 3x - 2y - 5z;\ x - z)$ $\qquad M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3.2 $\hat{P} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & +1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad {}^t\hat{P}\,P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & +2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Donc $\det(P) = 1$.

3.3 $\vec{U}$ a pour coordonnées dans la base canonique la 1re colonne de P $\vec{U} = (1,1,0)$.

3.4 $N = P^{-1}MP = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3.5 $\det M = \det(PNP^{-1}) = \det P \det N \det P^{-1} = \det N = 0$.

Donc M n'est pas diagonalisable.

3.6 $P_N(\lambda) = \det(N - \lambda I) = -\lambda^3$ $\quad$ Si N était diagonalisable alors $N = Q\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = 0$ Donc N pas diagonalisable.

Si M était diagonalisable alors N le serait.

$M = QDQ^{-1}$ $\qquad N = P^{-1}QDQ^{-1}P = (Q^{-1}P)^{-1}D(Q^{-1}P)$.