Controle 1 - Maths - L3 SPI Novembre 2015

Exo 1 : On cherche $a+ib \in \mathbb{C}$ tq $(a+ib)^2 = Z$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$(a+ib)^2 = Z \iff \begin{cases} |a+ib|^2 = |Z| \\ \operatorname{Re}(a+ib)^2 = \operatorname{Re} Z \\ \operatorname{Im}(a+ib)^2 = \operatorname{Im} Z \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+b^2 = \sqrt{4+12} \\ a^2-b^2 = 2 \\ 2ab = 2\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2+b^2 = 4 \\ a^2-b^2 = 2 \\ ab = \sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = 3 \\ b^2 = 1 \\ ab = \sqrt{3} \end{cases}$$

Z a donc deux racines complexes $\pm(\sqrt{3}+i)$. verif. $(\sqrt{3}+i)^2 = 3-1+2i\sqrt{3} = 2+2i\sqrt{3}$

Exo 2 : $Q(X) = 4(X+\frac{1}{2})^3 - 6(X+\frac{1}{2})^2 + 2(X+\frac{1}{2})3 = 4X^3 + 6X^2 + 3X + \frac{1}{2} - 6X^2 - 6X - \frac{3}{2} + 2X + 1 - 3$

2\. $Q(X) = 4X^3 - X - 3$ on remarque que $Q(1) = 0$, on peut donc factoriser par $(X-1)$.

$Q(X) = (X-1)(4X^2+4X+3)$ $\Delta = 16 - 4\times4\times3 < 0$ Donc $4X^2+4X+3$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

3\. $P(X) = Q(X-\frac{1}{2}) = (X-\frac{3}{2})\left(4(X-\frac{1}{2})^2 + 4(X-\frac{1}{2}) + 3\right) = (X-\frac{3}{2})(4X^2+2) = (2X-3)(2X^2+1)$.

Exo 3 : 3.1 :

$$\begin{array}{l|l} 2X^5+3X^4+3X^3+5X^2+6X+1 & X^3+2X^2+X \\ \hline \quad -X^4+X^3 & 2X^2-X+3 \\ \qquad 3X^3+6X^2 & \\ \qquad 0+0+3X+1 & \end{array}$$

Donc $P(X) = Q(X)(2X^2-X+3) + 3X+1$.

3.2 : $P(1) = 20$ $Q(1) = 4$ $2.1^2-1+3 = 4$ $3\times1+1 = 4$ $20 = 4\times4+4$ OK.

3.3 : $F(X) = \dfrac{Q(X)(2X^2-X+3)+3X+1}{Q(X)} = 2X^2-X+3 + \dfrac{3X+1}{Q(X)}$ $Q(X) = X(X^2+2X+1) = X(X+1)^2$.

$$\frac{3X+1}{Q(X)} = \frac{3X+1}{X(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$$

Pour a on multiplie par X puis on fait tendre $X \to 0$: $a = 1$

Pour c ——— $(X+1)^2$ ——— -1 : $c = -2/-1 = 2$

Pour b on remplace X par 1 : $\frac{4}{4} = \frac{a}{1} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}$ Donc $b = -1$.

Donc $\dfrac{3X+1}{X(X+1)^2} = \dfrac{1}{X} + \dfrac{-1}{X+1} + \dfrac{2}{(X+1)^2}$ verif pour $X = -2$: $\dfrac{-5}{-2} = \dfrac{-1}{2} + 1 + 2$ OK.

Donc $F(X) = 2X^2-X+3 + \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{2}{(X+1)^2}$.

Exo 4 : 4.1 : $f(x)$ est definie si $2x-1 \neq 0$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$

4.2 : $f'(x) = \dfrac{2(2x-1)-2}{(2x-1)^2} e^{2x+1} = \dfrac{4(x-1)}{(2x-1)^2} e^{2x+1}$ qui est du signe de $x-1$.

4.3 - 4.4 $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

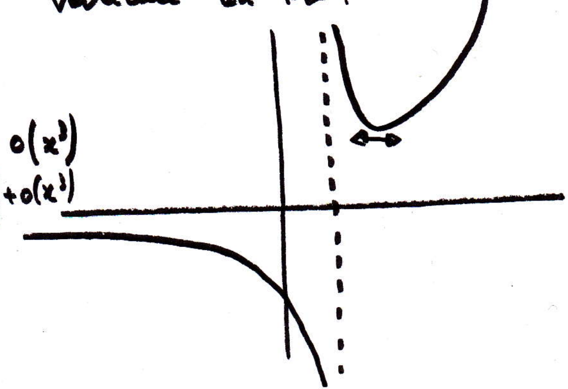
$\lim\limits_{(-\frac{1}{2})^-} f = -\infty$ $\lim\limits_{(-\frac{1}{2})^+} f = +\infty$

		$1/2$		1	
$f'(x)$	$-$	||	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow$	e^3	$\nearrow +\infty$

En $-\infty$: Asymptote horizontale

En $1/2$: ——— verticale

En $+\infty$: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{e^{2x}e}{(2x-1)x} \xrightarrow{x \to +\infty} +\infty$ Donc $\mathcal{C}$ possede une branche parabolique verticale en $+\infty$.



4.6 : $f(x) = -e\dfrac{e^{2x}}{1-2x}$

4.7 : $f(x) = -e\left(1+2x+\dfrac{(2x)^2}{2}+\dfrac{(2x)^3}{6}\right)(1+2x+4x^2+8x^3) + o(x^3)$

$= -e\left(1+4x+2x^2+4x^2+4x^2+\frac{4}{3}x^3+4x^3+8x^3+8x^3\right) + o(x^3)$

$= -e - 4ex - 10ex^2 - \dfrac{64}{3}ex^3 + o(x^3)$