

Examen de Mathématiques, Décembre 2014

Calculatrice et document sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée. Avoir sur soi un téléphone portable allumé, position silencieuse comprise, est interdit.

Exercice 1 : Intégrales

Calculer les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx$$

$$J = \int_0^1 \frac{-1 + 3x}{(1+x)(x^2+1)} \, dx$$

Exercice 2 : Droites et plans de l'espace

Soit le plan P d'équation $x + y + z = 0$ et Π le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$.

1. Déterminer un vecteur directeur \vec{u} de $P \cap \Pi$.
2. Déterminer un vecteur \vec{v} tel que (\vec{u}, \vec{v}) soit une base de P .
3. Déterminer un vecteur \vec{w} , de sorte que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3 : Déterminant et système

Soit a un réel et $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & a+2 & -4 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer le déterminant de M_a : $\Delta_a = \det(M_a)$.
2. Soit S le système :

$$S : \begin{cases} y + az = 1 \\ x + ay + 2y - 4z = 1 \\ -x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

- (a) Pour quelles valeurs de a , S a-t-il une unique solution ?
- (b) Pour $a = 1$, résoudre le système S , on ne demande pas la résolution du cas général.
3. Pour quelle valeur de a , le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de M_a ?

Exercice 4 : Diagonalisation

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & -7 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$