

L3 SPI
1er semestre
2014-2015

EXAMEN de MATHEMATIQUES N°1

Durée 2h00

Toute sortie est définitive.

Les calculatrices et les téléphones sont strictement interdits.
Ils doivent être éteints et rangés dans les sacs.

I) On considère le polynôme:

$$P(z) = z^4 - 6z^2 + 25$$

- 1) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $Z = 3 + 4i$.
En déduire sans calcul celles de $\bar{Z} = 3 - 4i$.
- 2) Calculer les 4 racines complexes de $P(z)$ en posant $Z = z^2$.

II) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle:

$$F(X) = \frac{2X^4 + X^3 + 3X^2 - 6X + 1}{2X^3 - X^2}$$

On commencera par une division euclidienne.

III) Soit la fonction d'une variable réelle définie par:

$$f(x) = (1 - x) \sqrt{1 - x^2}$$

et C sa courbe représentative.

1) Déterminer le domaine de définition de f et montrer que.

$$f'(x) = -(2x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

- 2) En déduire le tableau de variations de f .
- 3) Calculer les limites de f aux voisinages de $+1$ et -1 .
- 4) En plaçant tous les éléments remarquables, tracer la courbe C .
- 5) Déterminer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.