L3SPI
19 décembre 2013
Durée 2 heures

Examen de Mathématiques : contrôle 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée.
Barème indicatif : 5+5+10

Exercice 1 : Application linéaire, noyau.

Soit l'application linéaire f définie par $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6x-y-4z\\-10x+3y+8z\\10x-2y-7z\end{pmatrix}$

1. Montrer que le noyau de f est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.
2. Déterminer les vecteurs fixes de f, c'est à dire les vecteurs $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ qui vérifient $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, montrer qu'ils forment un plan dont on déterminera une base $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
3. Déterminer la matrice de f dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 2 : Matrice inverse

Soient m un réel, M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix}3&2&-3\\1&m&2\\4&3&-2\end{pmatrix}$ et (S) le système suivant $\begin{cases}3x+2y-3z=1\\x+2y+2z=5\\4x+3y-2z=10\end{cases}$

1. Calculer le déterminant de M.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice M est inversible.
3. Pour $m = 2$, calculer M^{-1}.
4. Résoudre le système (S).

Exercice 3 : Diagonalisation

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&3&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. Déterminer les valeurs propres de M, on vérifiera que leur somme est égale à 3.
3. Déterminer D diagonale et P inversible telle que $M = PDP^{-1}$.
4. Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies par leur premier terme : $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et par les relations de récurrence suivantes :
$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&3&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$$
Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.
5. Déterminer les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n).
6. Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites définies par leur premier terme : $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et par les relations de récurrence suivantes :
$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\\z_{n+1}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}M\begin{pmatrix}x_n\\y_n\\z_n\end{pmatrix}$$
Déterminer les limites des suites (x_n), (y_n) et (z_n).