

## Examen de Mathématiques : contrôle semestre 1 session 2

---

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée.

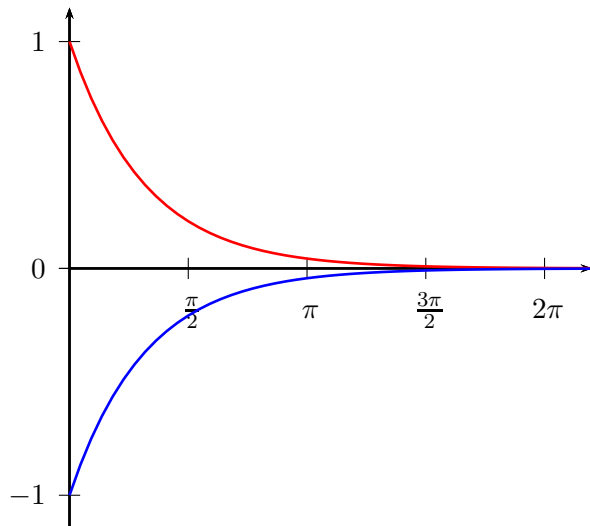
Barème indicatif : 10+10

---

### Exercice 1 : Etude de fonctions

Soient  $f$  la fonction définie sur  $[0, 2\pi]$  par  $f(x) = e^{-x} \sin x$ , et  $\mathcal{C}$  sa représentation graphique.

1. Déterminer la dérivée de  $f$ .
2. Montrer que l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  à l'origine est  $y = x$ .
3. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0, 2\pi]$ .
4. Étudier la convexité de  $f$  sur  $[0, 2\pi]$ .
5. Calculer l'intégrale  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ .
6. En vous aidant des courbes ci dessous, des fonctions  $e^{-x}$  et  $-e^{-x}$ , donner une idée de  $\mathcal{C}$ .



### Exercice 2 : Calcul matriciel

Soit la matrice  $A$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de  $A$ .
2. Inverser la matrice  $A$
3. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} -y + z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

4. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ .
5. Diagonaliser la matrice  $A$ , c'est à dire déterminer  $D$  diagonale et  $P$  inversible telles que  $A = PDP^{-1}$ .