

EXAMEN de MATHEMATIQUES

Durée 2h00

Les calculatrices et les téléphones sont strictement interdits.

1) Etude de fonction

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = x^3 - 3 \operatorname{Ln} x - 1$$

- a) Déterminer le domaine de définition de f.
- b) Calculer la dérivée de f et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme

$$f'(x) = \frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$$

- c) Dresser le tableau de variations de f et calculer ses limites.
- d) En déduire que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in D_f$
- e) Etudier les branches infinies et dresser une représentation graphique de f.
- f) Calculer :

$$I_a = \int_a^1 f(x) dx \quad \text{puis} \quad I = \lim_{a \rightarrow 0^+} I_a$$

2) Intégration

- a) Décomposer en éléments simples :

$$g(x) = \frac{-2x^2 + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x}$$

- b) Déterminer une primitive de g.

3) Calcul matriciel

Soit φ l'application linéaire de \mathfrak{R}^3 de matrice A dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer le noyau $\operatorname{Ker} \varphi$.
- b) Donner une base puis une équation du plan $\operatorname{Im} \varphi$.
- c) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
- d) Déterminer les sous-espaces propres associés.
- e) Diagonaliser A en D et donner la matrice de passage P.
- f) En déduire que φ est une projection sur un plan parallèlement à une droite, que l'on précisera.