

Examen de Mathématiques : contrôle 1

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée. Barème indicatif : 5+4+4+7

Exercice 1 : Nombres complexes

Soit $Z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

1. Calculer sous forme algébrique (partie réelle et partie imaginaire) les racines carrées z_1 et z_2 de Z dans \mathbb{C} .
2. Mettre Z sous forme exponentielle complexe puis déterminer z_1 et z_2 ses racines carrées sous forme exponentielle complexe.
3. En déduire que $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ et donner une expression similaire pour $\sin(\frac{\pi}{8})$

Exercice 2 : Polynôme

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1$

1. Montrer que z est une racine de P si et seulement si :

$$z^2 - 5z + 6 - \frac{5}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

2. En posant $w = z + \frac{1}{z}$, montrer que z est une racine de P si et seulement si $w^2 - 5w + 4 = 0$.
3. Résoudre $w^2 - 5w + 4 = 0$.
4. Factoriser P dans \mathbb{R} .

Exercice 3 : Fraction Rationnelle

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^4 + 2}{X^3 + X}$$

Exercice 4 : Étude de fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$. On note \mathcal{C} sa courbe représentative, dans un repère ortho-normé.

1. Vérifier que f est définie sur \mathbb{R} .
2. Étudier les variations de f .
3. Étudier la convexité de f .
4. Déterminer un DL₂ de la fonction définie par $g(x) = \sqrt{1 + 2x + 5x^2}$ au voisinage de 0.
5. En déduire que \mathcal{C} possède deux asymptotes que l'on déterminera, on précisera aussi la position de \mathcal{C} par rapport à ces asymptotes.
6. Représenter rapidement \mathcal{C} .