Examen de Mathématique L3 SPI — 9 Novembre 2012

Exercice 1.

$Z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

1) On cherche les $z = a+ib$ tels que $z^2 = Z$ or $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$

$z^2 = Z \iff \begin{cases} a^2-b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2ab = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 \\ a^2+b^2 = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}^2}+\frac{1}{\sqrt{2}^2}} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ 2b^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ ab > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}} \\ b = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}} \\ \varepsilon \in \{\pm 1\}. \end{cases}$

2) $Z = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\quad |Z| = 1.$ $\quad$ si $z^2 = Z$ alors $|z| = 1$

donc z s'écrit $e^{i\alpha}$ $\quad z^2 = e^{i2\alpha} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ ssi $2\alpha = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

ssi $\alpha = \frac{\pi}{8}\ [\pi]$.

finalement $z = e^{i\frac{\pi}{8}}$ ou $z = e^{i\frac{9\pi}{8}} = -e^{i\frac{\pi}{8}}$

3) Les racines complexes de Z sont $\pm e^{i\frac{\pi}{8}} = \pm\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$

et s'écrivent aussi $\pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ on a $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Exercice 2.

$P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1.$

1) 0 n'étant pas une racine de P, si z est une racine en divisant l'égalité $P(z) = 0$ par z^2 on obtient $z^2 - 5z + 6 - \frac{5}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$

2) $w = z + \frac{1}{z}$ $\quad w^2 = \left(z+\frac{1}{z}\right)^2 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}$ $\quad w^2 - 5w + 4 = z^2 + 2 + \frac{1}{z^2} - 5z - \frac{5}{z} + 4$

$= \frac{1}{z^2}P(z).$

Donc $P(z) = 0$ ssi $w^2 - 5w + 4 = 0$.

3) $w^2 - 5w + 4$, $\quad \Delta = 25 - 16 = 9 = 3^2$ $\quad w = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$

$w^2 - 5w + 4 = (w-1)(w-4)$ $\quad$ 2 racines simples 1 et 4.

4) $P(z) = z^2(w-1)(w-4) = z^2\left(z+\frac{1}{z}-1\right)\left(z+\frac{1}{z}-4\right) = (z^2-z+1)(z^2-4z+1)$

$z^2 - z + 1$: $\quad \Delta = 1 - 4 < 0$ donc $z^2 - z + 1$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$

$z^2 - 4z + 1$: $\quad \Delta = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2$ $\quad z = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

Donc $P(z) = (z^2 - z + 1)(z - 2 + \sqrt{3})(z - 2 - \sqrt{3})$

Exercice 3 :

$F(X) = \frac{X^4+2}{X^3+X}$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 2 & X^3 + X \\ -(X^4 + X^2) & X \\ \hline -X^2 + 2 & \end{array}$$

$F(X) = X + \frac{-X^2+2}{X(X^2+1)} = X + \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1}$

Pour trouver a on multiplie par X et on fait tendre $X \to 0$: $a = 2$.

———— $bX+c$ ———— X^2+1 ———— $X \to i$ $\quad \frac{-i^2+2}{i} = bi + c$

Donc $a = 2$ $\quad bi + c = \frac{3}{i} = -3i$ $\quad$ Donc $F(X) = X + \frac{2}{X} - \frac{3X}{X^2+1}$.

Exercice 4 :

$x^2 + 2x + 5$ $\quad \Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2+2x+5 >$

2) $f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

x		-1	
f'	$-$	0	$+$
f	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

3) $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+5)^{3/2}}$

$= \frac{x^2+2x+5-(x^2+2x+1)}{(x^2+2x+5)^{3/2}} = \frac{4}{(x^2+2x+5)^{3/2}} > 0$ Donc f est convexe

4) En 0 $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$

$\lim_{x\to 0} 2x + 5x^2 = 0$ donc $g(x) = 1 + \frac{1}{2}(2x+5x^2) - \frac{1}{8}(2x+5x^2)^2 + o(x^2)$

$= 1 + x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + x + 2x^2 + o(x^2)$

5) $\frac{f(x)}{|x|} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2}} = g\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$

En $+\infty$: $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $y = 1 + x$ est une asymptote et pour x grand $f(x) - (1+x) \sim \frac{2}{x} > 0$.

Donc la courbe est au dessus de son asymptote.

En $-\infty$: $\frac{f(x)}{-x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc $f(x) = -x - 1 - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $y = -1 - x$ est une asymptote

et pour x très négatif

$f(x) - (-x-1) \sim -\frac{2}{x} > 0$

Donc la courbe est au dessus de son asymptote