

EXAMEN de MATHEMATIQUES

Durée 2h00

Les calculatrices sont interdites.

On vérifiera les résultats des calculs sur la copie dans la mesure du possible.

I) Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 (2x^2 - 1)e^{2x} dx$$

II) Déterminer une primitive de la fraction rationnelle :

$$f(x) = \frac{4x + 4}{x^3 + 4x^2 + 4x}$$

III) On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculer le déterminant de A puis la matrice inverse A^{-1} .
- 2) Résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + z & = 4 \\ x + 3y & = -5 \\ 2x + 4y + 4z & = 6 \end{cases}$$

On pourra utiliser la question précédente, mais sans obligation.

- 3) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres (entières) de A.
- 4) Déterminer les sous-espaces propres associés.
- 5) Diagonaliser A.
On donnera si possible une matrice de passage P à coefficients entiers.
- 6) Résoudre par diagonalisation le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) = x(t) + z(t) & x(0) = 3 \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) & y(0) = 2 \\ z'(t) = 2x(t) + 4y(t) + 4z(t) & z(0) = 3 \end{array} \right\}$$