L3SPI
2 Novembre 2011
Durée 2 heures

Examen de Mathématiques : contrôle 1

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints.. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée.
Barème indicatif : 4+4+12

Exercice 1 :

Soient le polynôme $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 4$ et $z_0 = 1 + i$.

1. Montrer que z_0 est une racine de P.
2. Montrer que $\overline{z_0}$ est une racine de P.
3. Déterminer $Q(x) = (x - z_0)(x - \overline{z_0})$.
4. Factoriser $P(x)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

Soient les polynômes $P(x) = x^4 - x^3 + 6x^2 - 1$ et $Q(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
2. En remarquant que $Q(1) = 0$ factoriser Q dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$.

Exercice 3 :

Soient les deux fonctions f et k définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ k(x) = e^x(x-1) + 1$$

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f. Les questions ne sont pas classées par ordre croissant de difficulté et chacune d'elle peut être traitée en admettant les questions qui la précède.

1. Calculer $k(0) = 0$ puis étudier les variations de k, en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ k(x) > 0$.
2. Étudier les variations de f, ainsi que ses limites en $\pm\infty$.
3. Déterminer la limite de f en 0.
4. Dans la suite de l'exercice on suppose que f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et que $f(0) = 1$.
5. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.
6. En déduire que f est dérivable en 0, et déterminer $f'(0)$.
7. Montrer que f possède en $+\infty$ une branche parabolique.
8. Donner un équivalent simple de f en $+\infty$ puis un équivalent simple de f en $-\infty$.
9. Représenter $\mathcal{C}$, en faisant clairement apparaître l'allure de la courbe au voisinage de $-\infty$, de 0 et de $+\infty$.
10. Montrer que la fonction $g(x) = \ln(f(x))$ est croissante sur $\mathbb{R}$.