L3 SPI
1er semestre
2010-2011

EXAMEN de MATHEMATIQUES

Durée 2h00

Les calculatrices sont interdites.

I) On considère le polynôme complexe

$$P(X) = X^3 + (i+1).X^2 + 2.X + 2(i+1)$$

1) On suppose que P possède une racine imaginaire pure $x = a.i$, avec $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que a satisfait une équation d'ordre 2 et une autre d'ordre 3 que l'on écrira.
2) En déduire que P possède exactement deux racines imaginaires pures,
que l'on déterminera.
3) Factoriser entièrement $P(X)$ dans $\mathbb{C}$.

II) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{5X^4 - 3X^3 + 5X^2 + 2}{X^3 + X}$$

On commencera par extraire la partie entière par division euclidienne.

III) Etude et représentation graphique de la fonction définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x+1}{x^2}\right)$$

1) On pose $g(x) = \frac{2x+1}{x^2}$, déterminer le domaine de ddérivée,
étudier ses variations, et déterminer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
2) Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée de f.
3) Dresser le tableau de variations et déterminer les limites de f aux bornes
de son domaine de définition.
4) On prolonge f (par continuité), en posant $f(0) = \frac{\pi}{2}$.
a) Déterminer un DL_3 en 0 de la fonction définie par $h(x) = \frac{x^2}{1+2x}$.
b) En utilisant la propriété bien connue :

$$\forall t > 0,\ \arctan t + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$$

montrer que

$$\forall x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x^2}{1+2x}\right)$$

c) En admettant que $\arctan u = u - \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$ en 0, déterminer un DL_3 de f en 0.
d) En déduire la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

1. (a) Pourquoi la courbe représentative de f admet-elle une tangente horizontale en 0 ?

5) Dresser soigneusement la représentation graphique de f.