L3SPI
10 Janvier 2011
Durée 2 heures

Examen de Mathématiques : contrôle 2

Calculatrice et document sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée.
Barème indicatif : 7+7+6

Exercice 1 : Intégrales

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle
$$F(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$$
2. Effectuer le changement de variable $x = t^2$ dans l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{8t^3}{(t^2+1)(t^4+1)}\,\mathrm{d}t$.
3. Déduire des deux questions précédentes la valeur de I.
4. (Bonus) En utilisant certains des calculs précédents montrer que :
$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{8t^3}{(t^2+1)(t^4+1)}\,\mathrm{d}t = \pi$$

Exercice 2 : Résolution de systèmes

Soit S le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} mx+4y+z &=& -1 \\ mx+(m+1)y+2z &=& 1 \\ -2y+mz &=& 4 \end{array}\right.$$

1. Déterminer une matrice M tel que le système S se mette sous la forme $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Déterminer le determinant de M.
3. Pour quelles valeurs de m, le système S possède-t-il une unique solution ?
4. Pour $m \notin \{0,1,2\}$ résoudre le système par la méthode de Cramer.
5. Pour $m=1$, résoudre directement le système.
6. Pour $m=2$, résoudre directement le système.

Exercice 3 : Diagonalisation

Soient les deux matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser la matrice A, on calculera le polynôme caractéristique, on déterminera les valeurs propres de A, puis une base de vecteurs propres, enfin on donnera une matrice de passage, une matrice diagonale correspondante et la relation liant ces trois matrices.
2. (Bonus) En déduire une diagonalisation de B.