Calcul Intégral (L3), Université de Cergy–Pontoise

Examen du 16 décembre 2014, durée : 3 heures [1]

Les notes de cours ne sont pas autorisées

Les téléphones portables doivent être éteints

Une rédaction succincte et propre donnera jusqu'à deux points de bonus

Première partie

Questions. (5 points) Pour les questions 1–10, donner la réponse (*vrai* ou *faux*) sans aucune justification. Chaque bonne réponse donnera 0,5 point.

1. Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ des nombres réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui est constante sur tout intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ et zéro sur le complémentaire de $[x_1, x_n]$. Alors f est borélienne.

2. Une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ est bornée sur tout intervalle borné.

3. Soit $f_n(x) = x^{-3/2}\,|\sin(x/n)|$. Alors $\int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ quand $n \to \infty$.

4. Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions boréliennes positives sur $[0,1]$ telle que $f_n(x) = 0$ pour tout $x \geq 1/n$. Alors $\int_0^1 f_n \mathrm{d}x \to 0$ quand $n \to \infty$.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Alors $|f(x)| \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

6. Soit μ une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$ munie de la tribu borélienne. Alors $\mu([a,b]) < \infty$ pour tout intervalle borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

7. Soient μ et ν deux mesures sur $\mathbb{R}$. Alors μ est absolument continu par rapport à $\mu + \nu$.

8. Soit μ une mesure sur $[0,1]$ telle que la mesure de Lebesgue soit absolument continue par report à μ. Alors $\mu(\Gamma) = 0$ pour tout ensemble dénombrable $\Gamma \subset [0,1]$.

9. Une mesure borélienne μ sur $\mathbb{R}^2$ est totalement définie par ses valeurs sur les boréliens de la forme $\Gamma_1 \times \Gamma_2$.

10. Une fonction borélienne $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si

$$\int_{-1}^{1} \left| \int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| \mathrm{d}y < \infty.$$

Questions de cours. **(a) (4 points)** Énoncer les théorèmes de Beppo-Levi (convergence monotone) et de Lebesgue (convergence dominée). Montrer que le premier résultat implique le deuxième.

[1] *La note de l'examen* NE *est calculée par la formule* $\mathrm{NE} = \min(N1, 10) + N2$*, où* $N1$ *et* $N2$ *sont les notes pour les parties I et II.*

(c) **(1 point)** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Montrer que $a \leq b$.

Questions de TD. **(5 points)** Soit

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{x^2 + t^2 + (\sin t)^2}, \quad x > 0.$$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et trouver une formule intégrale pour sa dérivée.

Deuxième partie

Exercice 1. **(5 points)**

(a) Rappeler le théorème de Fubini, ainsi que ses hypothèses.

(b) Soit $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que la fonction

$$g(x) = \int_{[x,a]} \frac{f(t)}{t} \, \mathrm{d}t$$

est bien définie et continue sur l'intervalle $]0, a]$.

(c) Montrer que g est intégrable sur $[0, a]$ par rapport à la mesure de Lebesgue et que

$$\int_{[0,a]} g(x) \, \mathrm{d}x = \int_{[0,a]} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Exercice 2. **(5 points)** On considère l'intervalle $[0, 1]$ muni de la tribu borélienne. Soient $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $\{y_1, \ldots, y_m\}$ deux suites finies de $[0, 1]$ telles que $x_i \neq x_j$ et $y_i \neq y_j$ pour $i \neq j$. On définit les mesures

$$\mu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}, \quad \nu = \sum_{j=1}^m b_j \delta_{y_j},$$

où δ_z désigne la masse de Dirac au point $z \in \mathbb{R}$ et a_i, b_j sont des nombres positifs.

(a) En supposant que $m = n = 2$ and $x_i = y_i$ pour tout $i = 1, 2$, donner (avec justification) une condition nécessaire et suffisante sur a_i, b_i pour que μ soit absolument continue par rapport à ν. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence de μ et ν.

(b) Dans la situation générale, donner (avec justification) une condition nécessaire et suffisante sur x_i, y_j, a_i, b_j pour que μ soit absolument continue par rapport à ν. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence de μ et ν.

(c) Sous l'hypothèse que μ soit absolument continue par rapport à ν, trouver la densité $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu}$.