18 décembre 2014
L3
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Aucun document autorisé, calculatrice et téléphone interdits. Barème indicatif

Pour les exercices 1-2-3, une réponse sans justification vaudra 0 points

Exercice 1 (5 points)**.** Soit

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R} \qquad N : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Z},\ a + b\sqrt{2} \mapsto a^2 - 2b^2.$$

a) Démontrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ et que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a+b\sqrt{2}|a, b \in \mathbb{Q}\}$.
b) Démontrer que $N(z_1\, z_2) = N(z_1)\, N(z_2)$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

c) Démontrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est euclidien par rapport au stathme $\nu : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \to \mathbb{N}$, $z \mapsto \nu(z) := |N(z)|$. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est il factoriel?

d) Démontrer que

(1) les idéaux $(\sqrt{2})$, $(2 + \sqrt{2})$ et $(2 - \sqrt{2})$ coincident
(2) l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]/(\sqrt{2})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
(3) les anneaux

$$\frac{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}{(2)} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}{(2+\sqrt{2})} \times \frac{\mathbb{Z}[\sqrt{2}]}{(2-\sqrt{2})}$$

ne peuvent pas être isomorphes.

Exercice 2 (4,5 points)**.**
a) Soit K un corps et $n \geq 2$ un entier. Soit $\mathscr{D} = \{< v > | v \in K^n \setminus \{0\}\}$ l'ensemble des droites vectorielles de K^n. Ici par $< v >$ on denote le sous-espace vectoriel de K^n engendré par v, donc $< v >= \{\lambda v \,|\, \lambda \in K\}$. Soit $S_{\mathscr{D}}$ le groupe des bijections de l'ensemble $\mathscr{D}$ avec la loi de composition.
Démontrer que l'application

$$\sigma : GL(n, K) \to S_{\mathscr{D}} \qquad A \mapsto \sigma_A : < v > \mapsto < Av >$$

est un morphisme de groupes. Calculer le noyau.
b) A partir de maintenant $n = 2$, $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $G = GL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Démontrer que

$$\mathscr{D} = \{D_1 =< (1, 0) >,\ D_2 =< (0, 1) >,\ D_3 =< (1, 1) >,\ D_4 =< (1, 2) >\}.$$

c) Soit $\sigma : G \to S_{\mathscr{D}} \simeq S_4$ le morphisme de groupes défini comme avant par

$$G \ni A \mapsto \sigma_A \in S_4 \quad \text{avec} \quad \sigma_A(i) = j \quad \text{si} \quad A(D_i) = D_j$$

Calculer le cardinal de G. En déduire l'isomorphisme

$$\frac{G}{Z(G)} \simeq S_4.$$

TOURNER SVP

d) Soient T_1, T_2, T_3, T_4 les quatre matrices de transvections dans G et soit $G \ni D = 1_2 + E_{22}$ une dilatation. Verifier par le calcul (donc sans utiliser que σ est surjectif) que les éléments $\sigma_{T_1}, \sigma_{T_2}, \sigma_{T_3}, \sigma_{T_4}, \sigma_D$ engendrent S_4.

e) Pourquoi si on utilise que σ est surjectif **d)** est immédiat?

f) Quel est le cardinal du plus grand quotient abélien de G?

Exercice 3 (3,5 points)**.** Si $n \geq 3$ est un entier, on note par D_n le groupe diédral de cardinal $2n$.

a) Soit n est pair, démontrer que le centre de D_n est $Z(D_n) =< R^{\frac{n}{2}} >$. Ici R est la rotation d'angle $2\pi/n$.

b) Si n est pair, démontrer que $D_{2n} \not\simeq D_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c) Si n est impair, trouver dans D_{2n} un sous-groupe isomorphe à D_n et un sous-groupe distingué isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En utilisant le théorème sur le produit direct intérieur, démontrer que $D_{2n} \simeq D_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (Faire un dessin dans le cas $n = 3$ va surement vous aider)

Repondre à ces cinq questions sans justification (2,5 points)

1) Soit p un nombre premier et $k, n_1, ..., n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Combien d'éléments d'ordre p y a-t-il dans
$$\mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p^{n_k}\mathbb{Z} \ ?$$

2) Écrire $(27356) \in A_7$ comme produit de 3-cycles. Écrire $(135) \in S_5$ comme produit des générateurs (12), (23), (34) et (45) de S_5.

3) Écrire un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[x]$ de degré 12. (Il en existe une infinité donc le même polynôme sur deux copies différentes sera consideré comme suspect...)

4) Quel est l'ordre de la classe de $x + 1$ dans le groupe des inversibles de l'anneau quotient
$$\frac{(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]}{(x^2 + 2x + 2)} \ ?$$

5) Donner un exemple de $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4 qui ne soit pas un anneau à division et un exemple de $\mathbb{R}$-algèbre de dimension 4 qui soit un anneau à division.

Question de cours (5 points)

Énoncer et démontrer le théorème ...