Université de Cergy-Pontoise
Décembre 2013

Structures algébriques

Licence de Mathématiques, troisième année

Durée 3 heures, documents et calculatrice interdits

Question de cours - 4 points

Donner l'énoncé et la démonstration du théorème d'isomorphisme pour les anneaux commutatifs.

Premier exercice - 3 points

On considère le groupe $\mathcal{S}_7$ des permutations des entiers de 1 à n. Soit σ la permutation donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition en cycles de σ.
2. Déterminer le groupe engendré par σ. On donnera la décomposition en cycles de ses éléments. Quel est l'ordre de σ ?
3. Dans le groupe $\mathcal{S}_7$, quel est l'ordre maximal que peut avoir un élément ? On utilisera la décomposition en cycles.

Deuxième exercice - 8 points

Soit A l'anneau défini par :

$$A = \mathbb{F}_5[X]/(X^2 + 1)$$

où $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et le corps à cinq éléments et $I = (X^2 + \bar{1})$ est l'idéal principal engendre par le polynôme $X^2 + \bar{1}$. On rappelle que les éléments de A peuvent s'écrire de façon unique sous la forme

$$z = a + b\alpha$$

où α désigne la classe de X modulo l'idéal I et où a et b sont des éléments de $\mathbb{F}_5$.

1. Décomposer le polynôme $X^2 + \overline{1}$ en facteurs irréductibles dans l'anneau $\mathbb{F}_5[X]$. En déduire que l'anneau A n'est pas un corps. Combien l'anneau A a-t-il d'éléments ?
2. Montrer que $z_0 = 1 + \alpha$ est inversible et déterminer son inverse.
3. Déterminer l'ordre du groupe **multiplicatif** engendré par z_0.
4. Déterminer tous les éléments non inversibles de A.
5. On se place dans le cas où B est un anneau commutatif **fini**. Montrer que une élément a non nul de B est non inversible si et seulement si c'est un diviseur de 0.
6. En déduire l'ensemble D des diviseurs de 0 de A. Pour, chaque $a \in D$, préciser un a' non nul tel que $aa' = 0$.
7. Montrer que A est isomorphe à l'anneau
$$C = \mathbb{Z}[i]/(5)$$
où
$$\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, z = a + ib\}$$
et $(5) = 5\mathbb{Z}[i]$ est l'idéal principal engendré par 5.

Troisième exercice - 5 points

On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1 et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{U}_n$ désigne le groupe multiplicatif des racines n-ièmes de l'unité.

1. On désigne par G l'ensemble
$$G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_{2^n}$$
Montrer que G est un groupe pour le produit.
2. Soit $F = \mathbb{U}_4$. Montrer que F est le seul sous-groupe à 4 éléments de G.
3. Montrer que l'application $z \mapsto z^4$ est un morphisme du groupe G dans lui-même.
4. Montrer que ce morphisme est surjectif et en déduire que G/F est isomorphe à G.