17 décembre 2012
L3
Mathématiques

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Une réponse sans aucune justification sera considérée comme FAUSSE

Aucun document autorisé, calculatrice interdite

Exercice 1 (Petites questions, 7pts)**.**

a) Écrire un élément d'ordre 15 dans le groupe symétrique S_8. Préciser si l' élément trouvé est dans le sous-groupe alterné A_8. Quel est le plus grand ordre possible pour un élément de S_8?

b) Donner la définition d'anneau principal. Donner trois exemples d' anneaux principaux dont un de caractéristique 3. Préciser si les anneaux trouvés sont euclidiens. Donner un exemple d'anneau intègre commutatif non principal.

c) Soient m et n deux entiers positifs premiers entre eux et a et b deux entiers. Existe-t-il toujours un $x \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & a \mod m \\ x & \equiv & b \mod n \end{array} \right. ?$$

d) Soit p un nombre premier. Calculer le corps des fractions du sous-anneau

$$A = \left\{ \frac{m}{p^r} \in \mathbb{Q} \,|\, m \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N} \right\}$$

de $\mathbb{Q}$.

e) Factoriser la classe de 2 dans $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$ comme produit d'irréductibles de $\mathbb{Z}[x]/(x^2+1)$.

Exercice 2 (Anneaux : quotients, 5pts)**.** Soit $A = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$ et soient I l'idéal de A engendré par $f = x^2 + 2$ et J l'idéal de A engendré par $g = x^2 + 1$. La classe d'un élément m dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est notée m.

a) Quel est le cardinal de A/I et de A/J?

b) Trouver deux éléments non nuls de A/J tels que leur produit est nul.

c) Ecrire les idéaux de A/J.

d) Démontrer que les anneaux A/J et $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sont isomorphes. Expliciter l'isomorphisme.

e) Existent ils deux éléments non nuls dans A/I de produit nul?

f) Donner l'élément $a + I$ de A/I tel que

$$(a + I) \cdot (x + 1 + I) = x + I.$$

Exercice 3 (Anneaux : divisibilité, 4pts)**.** Soit

$$A = \left\{ f = \sum_i a_i x^i \in \mathbb{Z}[x] \,\middle|\, 3|a_1 \text{ et } 3^2|a_2 \right\}.$$

a) Démontrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[x]$.

b) Donner toutes les factorisations comme produit d'irréductibles de A (à permutation et au signe près) de l'élément $27x^3$.

c) A est-il un anneau factoriel?

d) Calculer le ppcm dans A de $9x^2$ et $3x$ puis, s'il existe, le ppcm de $9x^2$ et 3. **TSVP**

Exercice 4 (Groupes, 6pts)**.** On notera par $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \,|\, \exists\, \bar{b} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ et } \bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{1}\}.$$

a) En utilisant le théorème de Lagrange, démontrer que si n est un entier positif non nul fixé alors

$$\big(a \in \mathbb{Z}, \quad a \wedge n = 1\big) \quad \Longrightarrow \quad a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

Ici $\varphi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,|\, m < n \text{ et } m \wedge n = 1\}|$.

b) Calculer $\varphi(25)$, puis l'ordre de $\bar{2}$ dans $U(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})$.

c) En déduire que $U(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})$ est cyclique.

d) Combien y a-t-il d'éléments d'ordre 20 dans $U(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})$?

e) Donner la liste des sous-groupes de $U(\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})$. Pour chaque sous-groupe préciser le cardinal et un générateur.