Université de Cergy-Pontoise
Décembre 2011

Structures algébriques

Licence de Mathématiques, troisième année

Durée 3 heures, documents et calculatrice interdits

Premier exercice 4 points

On considère le groupe $\mathcal{S}_8$ des permutations des entiers de 1 à n. Soit σ la permutation donnée par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition en cycles de σ. Quelle est sa signature ?
2. On cherche des permutations τ de $\mathcal{S}_8$ telles que

$$\tau \circ \tau = \sigma \qquad (1)$$

   Montrer qu'il existe une solution telle que $\tau(1) = 2$: en utilisant la formule (1), on déterminera $\tau(2)$, puis les images de tous les entiers jusqu'à 8.
3. Montrer qu'il n'existe pas de permutation τ telle que $\tau \circ \tau = \sigma$ et cette fois $\tau(1) = 5$.

Second Exercice - 6 points

On rappelle que $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Soit $P = X^2 + \overline{1}$ polynôme de $\mathbb{F}_3[X]$.

1. Montrer que P est irréductible sur le corps $\mathbb{F}_3$.
2. Soit A l'anneau défini par

$$A = \mathbb{F}_3[X]/(P)$$

   où (P) désigne l'idéal principal des multiples de P. Rappeler pourquoi A est un corps et donner le nombre de ses éléments.
3. On note G le groupe multiplicatif formé par les éléments inversibles de A et α la classe de X dans le quotient A. Déterminer l'ordre de α dans G.
4. Soit $\beta = \alpha + \overline{1}$. Déterminer l'ordre de β dans G et en déduire que G est un groupe cyclique.

Troisième Exercice - 6 points

On note B l'ensemble

$$B = \{z \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ z = a + b\sqrt{2}\}$$

Cet ensemble est également noté $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

1. Vérifier que B est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
2. Pour $z = a + b\sqrt{2} \in B$, on pose $N(z) = a^2 - 2b^2$. Montrer que N est un morphisme multiplicatif de B dans $\mathbb{Z}$. Montrer également que $N(z) = 0 \iff z = 0$.
3. Montrer que $z \in B$ est un élément inversible de B si et seulement si $N(z) = 1$ ou $N(z) = -1$. Indication : pour une des implications, on pourra observer que $N(z) = (a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})$.
4. Vérifier que $\omega = 1 + \sqrt{2}$ est un élément inversible de B et donner son inverse. En utilisant les pusissance de ω, montrer que l'ensemble des inversibles de B est infini.
5. Soit $I = (\sqrt{2})$ l'idéal principal de B engendré par $\sqrt{2}$. Montrer que I contient 2 et tous les éléments de la forme $b\sqrt{2}$ où $b \in \mathbb{Z}$. Montrer que I est distinct de B, puis que c'est un idéal maximal.

Quatrième Exercice - 4 points

1. Soit A un anneau commutatif quelconque. On note $\mathcal{N}(A)$ l'ensemble des éléments **non** inversibles de A. Montrer que

$$\forall x \in \mathcal{N}(A),\ \forall a \in A,\ ax \in \mathcal{N}(A)$$

2. Montrer que si $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A, mais que si $A = \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$, ce n'est plus le cas.
3. Montrer que tout idéal strict de A (c'est-à-dire distinct de A) est inclus dans $\mathcal{N}(A)$.
4. On dit que A est un anneau local si $\mathcal{N}(A)$ est un idéal. Montrer que tout anneau local admet un seul idéal maximal. Vérifier que c'est bien le cas pour l'anneau $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$.