20 juin 2011
L3
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Une réponse sans aucune justification sera considérée comme <u>fausse</u>.

Exercice 1.

a) Décomposer les permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in S_8$ en un produit de cycles disjoints:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 7 & 4 & 8 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 8 & 4 & 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Calculer l'ordre et le signe de σ_1, σ_2.

c) Calculer σ_1^{2011} et σ_2^{1999}.

Exercice 2. On considère l'anneau $\mathbb{R}[x]$.

a) Trouver un générateur de l'idéal J engendré par les polynômes

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \qquad \text{et} \qquad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

b) Donner explicitement un isomorphisme d'anneaux

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{J} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Exercice 3.

a) Donner la définition de morphisme et d'isomorphisme d'anneaux.

b) Démontrer que $a \mapsto a + n\mathbb{Z}$ est le seul morphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}.$$

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur n et m pour l'existence d'un morphisme d'anneaux

$$\frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}.$$

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif intègre et I un idéal de A. On pose

$$\sqrt{I} = \{a \in A \,|\, a^n \in I, \quad \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

a) Démontrer que I est un idéal de A.

b) Si A est factoriel et I est principal engendré par a, démontrer que $\sqrt{I}$ est principal et trouver explicitement un générateur.

c) Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ et I est l'idéal principal engendré par $4(1 + i\sqrt{3})$. Démontrer que $\sqrt{I}$ n'est pas principal.

d) Que peut-on en déduire sur l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$?