**14 décembre 2010**
**L3**
**Mathématiques**

# STRUCTURES ALGÉBRIQUES

**Une réponse sans aucune justification sera considérée comme fausse.**

**Exercice 1** (Petites questions)**.**

**a)** Calculer l'ordre de $(\overline{4}, \overline{3})$ dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/75\mathbb{Z}$.

**b)** Écrire la permutation $\sigma \in S_{10}$ comme produit de cycles disjoints. Calculer ensuite l'ordre et le signe de $\sigma$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 4 & 1 & 10 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

**c)** Calculer, quand il existe, l'inverse de la classe de $x - 1$ dans les anneaux quotients

$$\frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x^2 + x + 1)}, \quad \frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x^2 + 2x + 1)}, \quad \frac{\mathbb{Z}[x]}{(x - 2)}.$$

**d)** Soit $G$ un groupe qui contient au moins un élément d'ordre 6. L'ensemble

$$\{1\} \cup \{g \in G \,|\, |g| = 6\}$$

peut il être un sous-groupe de $G$?

**e)** Donner la définition d'anneau euclidien.

**Exercice 2** (Anneaux)**.** Soit

$$A = \{f \in \mathbb{Z}[x] \,|\, f = \sum_i a_i x^i \text{ et } 2|a_1\}.$$

**a)** Démontrer que $A$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[x]$.

**b)** Décrire les éléments de l'idéal de $A$

$$M = (2) \cap (2x).$$

**c)** Donner la définition de ppcm de deux éléments d'un anneaux et énoncer une condition necessaire et suffisante pour l'existence du ppcm de deux éléments dans un anneau quelconque.

**d)** Existe-t-il le ppcm dans $A$ de 2 et $2x$?

**e)** $A$ est-il un anneau factoriel?

**f)** Démontrer que

$$I = \{f \in A \,|\, f = \sum_i a_i x^i \text{ et } a_0 = 0\}$$

est un idéal de $A$ et qu'il n'est pas principal.

**g)** $I$ est-il premier? Maximal? On pourra considérer le morphisme d'anneaux

$$\phi : A \to \mathbb{Z}, \quad f = \sum_i a_i x^i \mapsto a_0.$$

**Exercice 3** (Relations d'equivalence/groupes cycliques)**.** Pour tout entier positif $n$, soit

$$\mathbf{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\} \leq (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$$

le sous-groupe des racines $n$-èmes de l'unité.

**a)** Prouver que $\mathbf{U}_n$ est cyclique.

**b)** Démontrer que la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{U}_n$ définie par

$$z_1 \, \mathcal{R} \, z_2 \iff z_1^3 = z_2^3$$

est une relation d'equivalence.

**c)** Calculer le cardinal des classes pour $\mathcal{R}$ en séparant les deux cas $3 \nmid n$ et $3 \mid n$.

**d)** Calculer, dans les deux cas, le cardinal de l'ensemble quotient $\mathbf{U}_n/\mathcal{R}$.

**Exercice 4** (Groupe symétrique)**.** À l'aide d'un calcul simple dans $S_{16}$, démontrer que l'on ne peut pas, avec les règles usuelles du jeu de taquin [1], passer de la configuration de gauche à celle de droite.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 10 | 9 |
| 11 | 8 | 7 | 5 |
| 4 | 12 | 6 | 3 |
| 13 | 15 | 14 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 4 | 8 |
| 10 | 3 | 13 | 6 |
| 11 | 15 | 14 | 12 |
| 7 | 9 | 2 | |

[1]Les carreaux numerotés ne peuvent se déplacer que par glissement, horizontal ou vertical, dans la seule case vide à un moment donné.