CORRECTION DU SUJET DE STRUCTURES ALGÉBRIQUES, DÉCEMBRE 2010

Exercice 1.
a) L'ordre de $\overline{a}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est $\frac{n}{a \wedge n}$, donc l'ordre de $\overline{4}$ est 15 et celui de $\overline{3}$ est 25. L'ordre de $(\overline{4}, \overline{3})$ est le ppcm de 15 et 25, i.e. 75.
b) On a $\sigma = (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 8\ 10\ 9)(4\ 6)$. Donc l'ordre de σ est 4 et $sgn(\sigma) = -1$.
c) Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]$ on a $(x-1)^2 = x^2 + x + 1$ et $x^2 + 2x + 1 = x(x-1) + 1$. Donc la classe de $x - 1$ n'est pas inversible dans l' anneau quotient $\frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x^2+x+1)}$, et l'inverse de la classe de $x - 1$ dans $\frac{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[x]}{(x^2+2x+1)}$ est la classe de $2x$. Puisque dans $\frac{\mathbb{Z}[x]}{(x-2)}$ la classe de $x - 2$ coincide avec la classe de 1, son inverse est elle même.
d) L'ensemble $H = \{1\} \cup \{g \in G \,|\, |g| = 6\}$ ne peut pas être un sous-groupe de G car si $g \in H$ alors $g^2 \in H$ mais l'ordre de g^2 est 3.
e) Un anneau commutatif intègre A est euclidien s'il existe une application $\phi : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes

- pour tout $a, b \in A \setminus \{0\}$ on a $\phi(a) \leq \phi(ab)$,
- pour tout $a, b \in A$, $b \neq 0$, il existe $q, r \in A$ tels que

$$a = bq + r \qquad \text{et } r = 0 \text{ ou bien } \phi(r) < \phi(b).$$

Exercice 2.
a) On a $1 \in A$. Soit $f = \sum_i a_i x^i, g = \sum_i b_i x^i \in A$, alors $f - g, fg \in A$ car si $2|a_1, 2|b_1$ alors $2|(a_1 + b_1)$ et $2|(a_0 b_1 + a_1 b_0)$.
b) On a que $(2) = \{2a \,|\, a \in A\}$ et $(2x) = \{2xa \,|\, a \in A\}$, donc $M = (2) \cap (2x)$ est égal à

$$M = \{f \in A \,|\, \exists g_1, g_2 \in A \text{ et } f = 2g_1 = 2xg_2\} = \{4a_1 x + 4a_2 x^2 + 2\sum_{i \geq 3} a_i x^i \,|\, a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

c) On dit que m est le ppcm de a et b dans A si

- $m = aa',\ m = bb',\ \exists\ a', b' \in A$
- si $m' = ax,\ m' = by,\ \exists\ x, y \in A$ alors $m = m'z,\ \exists\ z \in A$

Les éléments a et b ont un ppcm dans A si et seulement si l'idéal $(a) \cap (b)$ est principal.
d) 2 et $2x$ n'ont pas de ppcm dans A. En effet 2 et $2x$ ont un ppcm dans A si et seulement si l'idéal M est principal et dans ce cas tout générateur de M est un ppcm de 2 et $2x$. Or $M = (4x, 4x^2, 2x^3, 2x^4)$ et il n'est donc pas principal. Plus simplement il suffit de remarquer que $4x$, le seul candidat possible (au signe près) à être le ppcm, ne l'est pas car il ne divise pas $4x^2$, un multiple commun de 2 et $2x$.
e) Dans un anneau factoriel deux éléments ont toujours un ppcm. A n'est donc pas un anneau factoriel.
f) $I = \{f = \sum_i a_i x^i \in A \,|\, a_0 = 0\} = Ker(\phi)$ où $\phi : A \to \mathbb{Z}, f = \sum_i a_i x^i \mapsto a_0$ est un morphisme d'anneaux car ϕ est l'evaluation en zero. I est donc un idéal. On a $I = (2x, x^2, x^3)$. Donc I n'est pas principal.
g) Le théorème d'isomorphisme nous donne $A/I \simeq \mathbb{Z}$ car ϕ est surjectif. I est donc premier mais pas maximal car $\mathbb{Z}$ est intègre mais pas un corps.

Exercice 3.
a) Le polynôme $x^n - 1 \in \mathbb{C}[x]$ a degré n et il a donc au plus n racines. L'élément $z = exp(\frac{2i\pi}{n}) \in \mathbf{U}_n$ a ordre n. Le groupe $\mathbf{U}_n$ est donc cyclique et engendré par z.
b) La relation $\mathcal{R}$ vérifie les propriétés reflexive, symétrique et transitive.
c) On a $z^{3r} = z^{3s} \iff n|3(r-s)$. Si $3 \not| n$ on doit donc avoir que $n|r - s$ i.e. $z^r = z^s$ et les classes ont toutes cardinal 1. Si $n = 3n'$ on doit avoir $n'|r - s$ et la classe d'un élément z^r devient $[z^r] = \{z^r, z^{r+n'}, z^{r+2n'}\}$, de cardinal 3.
d) Puisque les classes ont toutes le même cardinal, le cardinal de l'ensemble quotient $\mathbf{U}_n/\mathcal{R}$ est égale à n/m si m est le cardinal d'une classe. Donc le cardinal du quotient est n, si $3 \not| n$, ou n', si $n = 3n'$.

Exercice 4. On identifie S_{16} avec le groupe de permutations de l'ensemble $\{1, 2, ..., 15, \square\}$, où $\square$ est la case vide. À chaque glissement correspond une transposition du type $(\square\ i)$ avec $i \in \{1, 2, ..., 15\}$. Puisque dans la configuration de gauche la case vide se trouve à la même position que dans celle de droite, on passe d'une configuration à l'autre avec un nombre pair de transpositions de ce type. La permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 & 9 & 11 & 8 & 7 & 5 & 4 & 12 & 6 & 3 & 13 & 15 & 14 & \square \\ 1 & 5 & 4 & 8 & 10 & 3 & 13 & 6 & 11 & 15 & 14 & 12 & 7 & 9 & 2 & \square \end{pmatrix} \in S_{16}$$

doit donc être paire. Mais $\sigma = (1\ 5\ 6\ 14\ 2)(3\ 12\ 15\ 9\ 8)(7\ 13)(4\ 11\ 10)$ et $sgn(\sigma) = -1$. Le problème n'est donc pas résoluble.