Université de Cergy Pontoise

Structures Algébriques

L3, juin 2010

0 [6]

Justifier toutes les réponses

a. Soit $(G, \cdot)$ un groupe quelconque et soit

$$i : G \to G, \qquad g \mapsto i(g) = g^{-1}.$$

Est-il vrai que la fonction i est bijective? Est-il vrai que i est un morphisme de groupes?

b. Lesquels parmi ces anneaux sont des corps?

$$\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+2)}, \qquad \frac{\mathbb{Z}[x]}{(x)}, \qquad \frac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]}{(x^4+x^2+1)}.$$

c. Donner deux anneaux commutatifs non isomorphes avec exactement 4 idéaux (y compris les triviaux).

1 [7]

a. Soit $\sigma = (134679) \in S_9$.
(i) Donner la liste des éléments du sous-groupe $\langle\sigma\rangle$ de S_9.
(ii) Calculer le signe et l'ordre de tout élément.
(iii) Donner la liste des sous-groupes de $\langle\sigma\rangle$.

b. Soit p un nombre premier et soient $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $p \not| n$ et $p \leq m$. Si σ est un p-cycle dans S_m, démontrer que σ^n est aussi un p-cycle.

2 [9]

Soit $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ qui contient $\mathbb{Z}$ et $i\sqrt{5}$.

a. Démontrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + i\sqrt{5}\, b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

b. Trouver les diviseurs de 3 et de $i\sqrt{5} - 1$ dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. On remarquera que

$$N : \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \to \mathbb{N}, \qquad a + i\sqrt{5}b \mapsto N(a + i\sqrt{5}b) = a^2 + 5b^2$$

est une fonction multiplicative.

c. Démontrer que 1 n' appartient pas à l'idéal $(3, i\sqrt{5} - 1)$.

d. Démontrer que l'idéal $(3,\ i\sqrt{5} - 1)$ n'est pas principal.

e. Démontrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas un anneau euclidien.