Université de Cergy Pontoise

Structures Algébriques

L3, décembre 2009

0 [3]

1. [1] Écrire un élément d'ordre 6 dans le groupe additif

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}.$$

2. [1] Lequel entre I et J est un idéal de $\mathbb{R}[x]$? Justifier la réponse.

$$I = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(0) = 1\}, \qquad J = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(1) = 0\}.$$

3. [1] Calculer l'ordre et le signe de la permutation

$$\sigma = (137)(23)(45)(164)(1256) \in S_7.$$

A [5]

Soit

$$K = \frac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]}{(x^2+x+1)}.$$

1. [1] Démontrer que K est un corps.

2. [1] En justifiant le réponse, donner le cardinal de K.

3. [1] Soit G le groupe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$. Calculer l'ordre de la classe de x (notée $\overline{x}$), puis l'ordre de $\overline{x+1}$ et ensuite l'ordre de $\overline{x+2}$.

4. [1] Démontrer que G est un groupe cyclique.

5. [1] Donner la liste des sous-groupes de cardinal 4 de G.

B [3]

1. [1] Soient G, H deux groupes et soit $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. Soit $g \in G$ un élément d'ordre n. Démontrer que l'ordre de $\varphi(g)$ divise n.

2. [2] Peut il exister un *morphisme surjectif* de groupes

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \text{ ?}$$

Justifier la réponse.

C [2]

Soit $n \geq 3$. Démontrer que il n'existe pas un élément $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma^3 = (123)$.

D [11,5]

1. [1] Soit
$$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x] = \{a(x) \in \mathbb{Q}[x] \,|\, a(0) \in \mathbb{Z}\}.$$
Démontrer que $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[x]$.

2. [1] Calculer l'ensemble $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]^*$des éléments inversibles de $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$.

3. [1] Soit I l'idéal de $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$ défini par $I = \{a(x) \in \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x] \,|\, a(0) = 0\}$. Donner un isomorphisme d'anneaux
$$\frac{\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]}{I} \simeq \mathbb{Z}.$$

4. [1,5] Donner la définition d'anneau factoriel.

5. [3] Démontrer que $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$ n'est pas factoriel.

6. [2] Démontrer que l'idéal I n'est pas principal.

7. [2] Calculer $Frac(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x])$.