$\boxed{0}$ (1

1. Il y a deux éléments d'ordre 6 dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$: $(\bar{2},\bar{5})$, $(\bar{2},\bar{10})$.

2. I n'est pas un idéal car $1 \in I$ et $I \neq \mathbb{R}[x]$
J est un idéal car $p(x), q(x) \in J$, $\alpha(x) \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow \begin{cases} p(x)-q(x) \in J \\ \alpha(x)p(x) \in J \end{cases}$

3. $\sigma = (17)(243)$ donc $|\sigma| = 6$ $\operatorname{sgn}\sigma = -1$

$\boxed{A}$

1. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$ est euclidien (donc principal) car $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un corps.

Donc x^2+x+1 irréd $\Leftrightarrow$ x^2+x+1 premier $\Leftrightarrow$ l'idéal (x^2+x+1) est premier $\Leftrightarrow$

l'idéal (x^2+x+1) est maximal $\Leftrightarrow$ K est un corps

or $\deg(x^2+x+1) = 2$ $\Rightarrow$ (x^2+x+1 irréd $\Leftrightarrow$ x^2+x+1 n'a pas de racines)

$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ ne sont pas de racines de x^2+x+1 $\Rightarrow$ x^2+x+1 est irréd. et K

est un corps.

2. On a un isomorphisme d'<u>ESPACES VECTORIELS</u> sur le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 &\longrightarrow K \\ (a,b) &\longmapsto ax+b+(x^2+x+1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow |K| = 5^2 = 25$

3. $\bar{x}^2 = \overline{-(x+1)}$ $\quad\bar{x}^3 = \overline{-x^2-x} = \bar{1}$

Donc $|\bar{x}| = 3$

$\overline{x+1}^2 = \overline{x^2+1+2x} = \bar{x}$ $\Rightarrow |\overline{x+1}| = 6$

$\overline{x+2}^2 = \overline{x^2+4x+4} = \overline{x^2+x+1} + \overline{3(x+1)} = \bar{3}\,(\overline{x+1})$

Or $|\bar{3}| = 4$, $|\overline{x+1}| = 6$ $\Rightarrow |(\overline{x+2})^2| = 12 \Rightarrow |\overline{x+2}| = 24$

4. $\langle \overline{x+2} \rangle$ est un sousgp de G de cardinal 24, il coincide donc avec G

5. $\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\} = \langle \overline{2} \rangle$ est un sousgp de card 4 de G.
Puisque G est cyclique il admet un seul sousgp de cardinal 4 (pour chaque diviseur du cardinal de G, il existe un unique sousgp de cardinal ce diviseur)
Donc la liste est : $\langle \overline{2} \rangle$.

$\boxed{B}$

1. $g^n = 1 \Rightarrow 1 = \varphi(1) = \varphi(g^n) = \varphi(g)^n \Rightarrow |\varphi(g)| \mid n$

2. Soit $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ un morphisme surjectif et

soit $g = (g_1, g_2)$ t.q. $\varphi(g) = \overline{1}$. On doit donc avoir

$|\varphi(g)| = 16 \mid |g| = |g_1| \vee |g_2|$. Mais $g_1 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ $g_2 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

donc les seuls ordres possibles pour g_1 sont "1" (si $g_1 = \overline{1}$), 2 et 4
et les seuls ordres possibles pour g_2 sont "1" (si $g_2 = 1$), 2, 4 et 8

dans tous les cas $16 \nmid |g_1| \vee |g_2|$.
Il n'existe donc pas un morphisme surjectif $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$

$\boxed{C}$

Soit $\sigma \in S_n$ t.q. $\sigma^3 = (123)$ Alors $|\sigma| = 9$

$\Rightarrow \sigma$ peut s'écrire comme le produit de 3-cycles et 9-cycles DISJOINTS.

Soit $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r \eta_1 \cdots \eta_s$ avec τ_i 3-cycles $\forall i = 1, r$
η_i 9-cycles $\forall i = 1, s$

On aura $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{car cycles disjoints}}}{\sigma^3 =} \tau_1^3 \cdots \tau_r^3 \eta_1^3 \cdots \eta_s^3 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \tau_i^3 = 1 \ \forall i = 1, \dots, r}}{=} \eta_1^3 \cdots \eta_s^3$ et les η_i^3 sont disjoints

Soit η un 9-cycle $\eta = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9)$

alors $\eta^3 = (a_1\, a_4\, a_7)(a_2\, a_5\, a_8)(a_3\, a_6\, a_9)$

Il est donc impossible (les η_i^3 sont disjoints !) d'avoir $\sigma^3 =$ 3-cycle.

$\boxed{D}$

1. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$ est un sous anneau car $1 \in \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$ et $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x] \Rightarrow$

$a(x) - b(x) \in \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$, $a(x)b(x) \in \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$

2. Soit $a(x) \in \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]^*$. Il existe donc $b(x) \in \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$ t.q. $a(x)b(x) = 1$

$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$ est intègre car $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]$ est un sous anneau de l'anneau intègre $\mathbb{Q}[x]$

donc $\deg(a(x)b(x)) = \deg(a(x)) + \deg(b(x))$ $\Rightarrow$ On doit avoir $a(x) = a \in \mathbb{Z}$
$b(x) = b \in \mathbb{Z}$

et $ab = 1$ $\Rightarrow$ $a = \pm 1$ Donc $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]^* = \{\pm 1\}$

3. $\varphi : \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x] \to \mathbb{Z}$ $a(x) \mapsto a(0)$ est un morphisme surjectif

de Ker $= I$. Le théorème d'isomorphisme nous donne donc

$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x] / I \simeq \mathbb{Z}$

4. A est un anneau factoriel si (1) et (2) sont verifiées.

(1) $a \in A \setminus (A^* \cup \{0\})$ $\Rightarrow$ $\exists\, p_1, \dots, p_r \in A$ irreductibles et

$a = p_1 \cdots p_r$

(2) si $p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ avec p_i et q_j irreductibles
$(i = 1, \dots, r)$
$(j = 1, \dots, s)$

alors $r = s$ et il existe $\sigma \in S_r$ t.p. q_i est associé à $p_{\sigma(i)}$

5. x ne peut pas s'écrire comme le produit d'irréductibles.

En effet

$$(x) \subsetneq \left(\tfrac{1}{2}x\right) \subsetneq \left(\tfrac{1}{4}x\right) \subsetneq \left(\tfrac{1}{8}x\right) \subsetneq \cdots \subsetneq \left(\tfrac{1}{2^n}x\right) \subsetneq \cdots$$

est une suite croissante d'idéaux principaux qui ne se stabilise pas.

6. I n'est pas principal car si $I = (p(x))$ alors

$$p(x) = \frac{m}{n}x + \sum_{i \geq 2} q_i x^i \qquad m,n \in \mathbb{Z} \quad m \wedge n = 1$$
$$q_i \in \mathbb{Q}$$

et $\frac{1}{n+1}x \in I \setminus (p(x))$

7. $\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$

Or on sait que $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[x]) = \mathrm{Frac}(\mathbb{Q}[x]) = \mathbb{Q}(x) = \left\{ \frac{f}{g} \mid \begin{array}{l} f,g \in \mathbb{Q}[x] \\ g \neq 0 \end{array} \right\}$

Donc $\mathrm{Frac}(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}[x]) = \mathbb{Q}(x)$.