Université de Cergy Pontoise

Structures Algébriques

L3, décembre 2008

A

1. Soit
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \\ 6 & 3 & 1 & 7 & 5 & 9 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in S_9.$$
Ecrire σ comme un produit de cycles disjoints. Quel est l'ordre de $\tau = (136)(235)(146)$?

2. Soit
$$A = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \qquad B = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}.$$
Les groupes $(A, +)$, $(B, +)$ sont-ils cycliques? Quelle est la caractéristique des anneaux A et B? Justifier les réponses.

B

Soient A, B les anneaux quotients
$$A = \frac{\mathbb{F}_3[x]}{(x^2 + x + 2)}, \qquad B = \frac{\mathbb{Q}[x]}{((x-2)^2(x^2 - 4x + 2))},$$
où $\mathbb{F}_3$ est le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

1. A, B sont-ils des corps? Justifier la réponse.

2. Trouver l'inverse de la classe de $\overline{2}x + \overline{1}$ dans A.

3. Écrire un diviseur de zero de B.

4. Donner la liste des éléments nilpotents de B (un élément $b \in B$ est nilpotent s'il existe un entier positif n tel que $b^n = 0$.).

5. Calculer l'ordre de tout élément du groupe $G = (A \setminus \{0\}, \cdot)$, où $\cdot$ est la multiplication de l'anneau A.

6. Démontrer que le groupe G est cyclique.

7. Trouver tous les sous-groupes de G.

C

1. Soit $\mathcal{R}$ une rélation d'équivalence sur un ensemble fini de cardinal N. On suppose que toutes les classes ont le même cardinal r. Quel est le nombre des classes et pourquoi?

2. Appliquer **1** pour démontrer le théorème de Lagrange.

D

1. Donner la définition d'anneau factoriel. Donner un exemple d' anneau commutatif intègre qui est factoriel et un exemple d'anneau commutatif intègre qui n'est pas factoriel.

2. Démontrer que dans un anneau factoriel deux éléments non inversibles et non nuls admettent toujours un pgcd et un ppcm.

3. Soit A un anneau factoriel et soient $a, b, c \in A\backslash\{0\}$ trois éléments non inversibles. Démontrer que

$$a|bc \quad \text{et} \quad a \wedge b = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a|c.$$

E

1. Soit G un groupe tel que

$$\bigcap_{H \leq G, \{1\} \neq H} H \quad \neq \{1\}$$

où $H \leq G$ signifie que H est un sous groupe de G. Démontrer par l'absurde que tout élément de G a un ordre fini.

2. Démontrer que

$$Frac(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]) \simeq \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2 - 2)}.$$