STRUCTURES ALGÉBRIQUES, L3, DÉCEMBRE 2007

1

a. Dans quel type d'anneau commutatif intègre est-elle valable l'identité de Bezout? Démontrez la.

b. Soit $f = x^2 + \overline{1}$, $g = x^4 + \overline{3}x^3 + x^2 + \overline{4}x + \overline{3} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$. Trouvez les idéaux des anneaux quotients
$$\frac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]}{(f,g)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]}{(f)\cap(g)}.$$

2

Soit
$$A = \frac{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[x]}{(x^2+\overline{b})}, \qquad \overline{0} \neq \overline{b} \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

a. À quelle condition necessaire et suffisante sur $\overline{b}$, A est-il un corps? Pourquoi?

b. Dans le cas où $\overline{b} = \overline{4}$ trouvez un sous groupe de cardinal 12 de $(A \setminus \{0_A\}, \cdot)$.

c. Dans le cas où l'anneau A n'est pas un corps, démontrez qu'il admet 12 diviseurs de zero.

d. Dans le cas où A n'est pas un corps, démontrez qu'il est isomorphe, comme anneau, à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

3

En utilisant le lemme chinois, démontrez que si m et n sont deux entiers positifs premiers entre eux alors
$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$
Ici $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction d'Euler, i.e. $\varphi(m)$ est le cardinal de l'ensemble $\{r \in \mathbb{N} \mid r < m,\ r \wedge m = 1\}$.

4

Donnez la définition d'anneau factoriel et un exemple d'anneau commutatif intègre qui n'est pas factoriel.

5

Soit G un groupe fini et H un sous groupe de G. Démontrez que le cardinal de H divise le cardinal de G (théorème de Lagrange).

6

Comptez les sous-groupes de cardinal 3 dans S_6. Sont-ils tous isomorphes? Combien y en a-t-il de distingués?