Université de Cergy-Pontoise
Juin 2007
L3- STRUCTURES ALGÉBRIQUES, seconde session

Durée 2 heures, documents et calculatrice interdits

Premier Exercice - 6 points

1. Soit G un groupe. Rappeler la définition de l'ordre d'un élément de G.
2. On suppose que G est fini, justifier que tout élément de G est d'ordre fini.
3. On considère le groupe $G = \mathbb{Q}$ des rationnels, muni de l'addition. Vérifier que $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de G. Pourquoi est-il distingué dans G ?
4. Soit dans le quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ l'élément $x = \overline{7/5}$, classe du rationnel $\frac{7}{5}$. Montrer que son ordre est 5. (Attention, la loi de composition est l'addition)
5. Montrer que tout élément du groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est d'ordre fini et justifier que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est infini.

Second exercice - 6 points

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Si $a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pose $I(a) = \{b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid ab = \overline{0}\}$. Montrer que $I(a)$ est un idéal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
2. Déterminer $I(a)$ pour tout a de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
3. On revient au cas général. À quelle condition $I(a) = \{\overline{0}\}$?
4. Montrer que, si x et y sont des éléments de $\mathbb{Z}$, $I(\overline{x}) = I(\overline{y})) \iff \text{pgcd}(x, n) = \text{pgcd}(y, n)$.

Troisième Exercice -8 points

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients réels. Soit B l'ensemble des polynômes P tels que :

$$P'(0) = 0$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$
2. Déterminer une base de B.
3. Montrer que B est un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$.
4. Déterminer les éléments inversibles de B. On utilisera le degré.
5. Donner la définition d'un élément irréductible dans un anneau commutatif intègre et montrer que X^2 et X^3 sont irréductibles dans B.
6. En déduire que B n'est pas un anneau factoriel.