Université de Cergy-Pontoise
Décembre 2006
L3- STRUCTURES ALGÉBRIQUES

Durée 3 heures, documents et calculatrice interdits

Premier Exercice - 5 points

On considère le groupe $\mathbf{G} = \mathcal{S}_4$ des permutations des nombres 1, 2, 3 et 4, la loi rond est notée multiplicativement, l'élément neutre est noté e. On note τ la double transposition $\tau = (1,2)(3,4)$ et σ le 4-cycle $\sigma = (1,2,3,4)$. On se propose de déterminer le sous-groupe $\mathbf{D}$ engendré par τ et σ.

1. Déterminer l'ordre de τ et de σ.
2. Vérifier que $\tau\sigma^k\tau^{-1} = \sigma^{-k}$, pour tout $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$. et que $\tau\sigma^k$ est d'ordre 2, pour tout $k = 1$, $k = 2$ et $k = 3$.
3. Soit S l'ensemble défini par :

$$S = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3\}$$

   Vérifier, en utilisant la question précédente que S est un sous-groupe de $\mathbf{G}$. En déduire que $\mathbf{D} = S$.
4. Démontrer que $\mathbf{D}$ n'est pas distingué dans $\mathbf{G}$.

Second Exercice - 4 points

Soit A un anneau commutatif. On considère deux idéaux I et J.

1. Montrer que :

$$I \cup J \quad \text{est un idéal} \quad \iff \quad I \subset J \quad \text{ou} \quad J \subset I$$

2. Soient I, J, K trois idéaux. On suppose qu'aucun idéal n'est inclus dans la réunion des deux autres et que K est un idéal premier. Montrer qu'il existe $i \in I$, $j \in J$ tels que $ij \notin K$. En déduire que $I \cup J \cup K$ n'est pas un idéal.

Troisième exercice - 11 points

1. Soit K un corps, on considère l'anneau des polynômes $K[X]$. Montrer qu'un polynôme du troisième degré de $K[X]$ est irréductible si et seulement si il n'a aucune racine dans K.
2. Dans la suite du problème, on prend pour corps le corps $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Montrer que le polynôme $X^3 - X + \overline{1}$ est irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$.
3. Soit $L = \mathbb{F}_3[X]/(X^3 - X + \overline{1})$, quotient de $\mathbb{F}_3[X]$ par l'idéal principal $(X^3 - X + \overline{1})$. Justifier que c'est un corps.
4. Montrer que si on note α la classe de X modulo l'idéal $(X^3 - X + \overline{1})$, alors tout élément w de L s'écrit de façon unique : $w = x + y\alpha + z\alpha^2$ où $(x, y, z) \in \mathbb{F}_3^3$. Quel est le nombre d'éléments de L ?
5. Montrer que, dans L, on a pour tout $(w, w') \in L$:
$$(w + w')^3 = w^3 + w'^3$$
6. Soit $L^* = L \setminus \{0\}$, ensemble des éléments inversibles de L. Démontrer que $\alpha^{13} = -\overline{1}$. En déduire que L^* est cyclique d'ordre 26 et de générateur α.
7. On considère maintenant $M = \mathbb{F}_3[X]/(X^3 - X)$. Vérifier que M n'est pas un corps.
8. Montrer que M est isomorphe à l'anneau produit $A = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$.