Université de Cergy-Pontoise
Juin 2005
Algèbre 1
Licence de Mathématiques
Durée 3 heures, documents et calculatrices interdits

Questions de cours - 5 points

1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Donner la définition du polynôme minimal d'un endomorphisme u. Montrer que ce n'est jamais le polynôme nul.
2. Soit A un anneau commutatif intègre. Donner la définition d'un élément irréductible de A, d'un élément premier de A. Montrer que dans un anneau factoriel, tout irréductible est premier.

Premier Exercice - 6 points

Soit G l'ensemble des entiers de Gauss :

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists (a,b) \in \mathbb{Z} \qquad z = a + bi\}$$

On rappelle que c'est un anneau (commutatif intègre) et que l'application $N : G \to \mathbb{N}$ définie par $N(z) = z\overline{z}$ est un morphisme pour le produit. On note I l'idéal principal engendré par $1+3i$ et $A = G/I$ l'anneau quotient. On notera $\tilde{z}$ la classe modulo I d'un élément de G (pour ne pas confondre avec le conjugué).

1. Montrer que $i - 3$ est un associé de $1 + 3i$ et en déduire que $\tilde{i} = \tilde{3}$.
2. Montrer que $\widetilde{10} = \widetilde{0}$ et que $\widetilde{a+bi} = \widetilde{a+3b}$ lorsque a et b sont dans $\mathbb{Z}$.
3. Montrer qu'il existe un seul morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A et qu'il est surjectif.
4. Montrer que $1 + 3i$ n'est pas une unité de G et qu'il ne divise ni 2 ni 5 dans l'anneau G.
5. Montrer que A est isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Deuxième exercice - 4 points

(a) Soit N un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{C}^6$. Donner son polynôme caractéristique.

(b) Soit N_1 et N_2 deux endomorphismes nilpotents de $\mathbb{C}^6$ qui ont le même polynôme minimal. Si la dimension du noyau de N_1 est égale à la dimension du noyau de N_2, montrer que N_1 et N_2 sont semblables. On pourra étudier les différents cas et montrer que les deux endomorphismes ont même réduction de Jordan.

(c) Donner un contre-exemple pour $\mathbb{C}^7$: c'est-à-dire deux endomorphismes nilpotents M_1 et M_2, qui ont le même polynôme minimal et tels que $\dim \operatorname{Ker} M_1 = \dim \operatorname{Ker} M_2$, mais qui ne sont pas semblables.

Troisième exercice - 5 points

Soit I l'idéal de $\mathbb{C}[X]$ engendré par $X^2(X-1)^3$.

(a) On note $\overline{P(X)}$ la classe de $P(X)$ modulo I, c'est-à-dire l'ensemble $P(X)+I$. Montrer que $\mathbb{C}[X]/I$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 5 engendré par $\overline{1}$, $\overline{X}$, $\overline{X}^2$, $\overline{X}^3$, $\overline{X}^4$.

(b) Soit $\phi : \mathbb{C}[X]/I \to \mathbb{C}[X]/I$ l'application qui est la multiplication par $\overline{X}$ (par exemple $\phi(\overline{X}^2+\overline{1}) = \overline{X}^3+\overline{X}$). Vérifier que ϕ est linéaire. Déterminer la forme de Jordan de ϕ.

(c) Donner une base dans laquelle la matrice de ϕ est dans sa forme de Jordan.