Université de Cergy-Pontoise
Novembre 2004
Algèbre 1

[width=3cm]UCP.eps

Licence de Mathématiques

Durée 3 heures, documents et calculatrices interdits

Questions de cours - 5 points

1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Donner la définition d'un endomorphisme diagonalisable. Démontrer que si un endomorphisme u est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé.
2. Donner la définition d'un anneau intègre. Démontrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Premier Exercice - 9 points

Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de E. On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F est u-stable si $u(F) \subset F$. Les sous-espaces $\{0\}$ et E sont toujours u-stables, on dit que ce sont les sous-espaces stables «triviaux».

1. Montrer qu'une droite vectorielle $F = \mathrm{vect}(x)$ est u-stable si et seulement si x est un vecteur propre de u. Donner un exemple (K=$\mathbb{R}$, n=2) d'endomorphisme qui n'admet aucun sous-espace stable non trivial.
2. On suppose que F est u-stable, et soit v la restriction de u à F. Montrer que $\chi_v(X)$ est un diviseur de $\chi_u(X)$.
3. On suppose dans cette question que u est diagonalisable. Montrer que les sous-espaces u-stables sont tous les sous-espaces vectoriels engendrés par des vecteurs propres.
4. Dans le cas où il y a n valeurs propres distinctes, montrer qu'il y a 2^n sous-espaces u-stables distincts.
5. Application : trouver tous les sous-espaces u-stables de l'endomorphisme u dont la matrice est
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
6. Soit u l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :
$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Chercher les valeurs propres et les sous-espaces propres. En déduire les sous-espaces stables de dimension 1 et un sous-espace stable de dimension 2.

7. u étant l'endomorphisme défini dans la question, précédente, montrer que

$$\mathrm{Ker}(u - 3\mathrm{id})^2$$

est un sous-espace u-stable. Le déterminer et montrer qu'il n'est pas engendré par des vecteurs propres.

Second exercice - 6 points

Dans tout cet exercice, les anneaux considérés sont supposés **commutatifs** et **intègres**. On dit qu'un sous-ensemble S de A est une **partie multiplicative** s'il est non vide, s'il ne contient pas 0 mais contient 1, et si :

$$\forall (s, s') \in S,\ ss' \in S$$

1. Montrer que l'ensemble $\{a \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N},\ a = 2^n\}$ est une partie multiplicative de $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ est une partie multiplicative de $\mathbb{Z}$. Est-ce que l'ensemble $\mathbb{Z} \setminus 6\mathbb{Z}$ est une partie multiplicative de $\mathbb{Z}$?
3. Soit I un idéal de A. Montrer que $S = A \setminus I$ est une partie multiplicative de A si et seulement si l'idéal I a la propriété :

$$\forall (a, b) \in A,\ ab \in I \Rightarrow a \in I \text{ ou } b \in I$$

Montrer également que $S = A \setminus I$ est une partie multiplicative de A si et seulement si l'anneau quotient A/I est intègre.

4. Soit K le corps des fractions de A. Montrer que l'ensemble que l'on note $S^{-1}A$ et qui est défini par :

$$S^{-1}A = \{x \in K \mid \exists s \in S, \exists a \in A,\ x = \frac{a}{s}\}$$

est un sous-anneau de K.