Université de Cergy-Pontoise - Licence de mathématique
Examen Probabilité - 18 décembre 2012

L'utilisation ou la consultation d'un téléphone portable est fortement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être éteints et rangés.

Questions de cours : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On considère les assertions suivantes:

(A) La suite X_n converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X.
(B) La suite X_n converge en probabilité vers une variable aléatoire X.
(C) La suite X_n converge en loi vers une variable aléatoire X.
(D) La suite X_n converge presque surement vers une variable aléatoire X.

Compléter par "$\Leftarrow$" ou "$\Rightarrow$" ou " $\Leftrightarrow$" ou bien par "ni $\Leftarrow$ ni $\Rightarrow$":

1) (A) ... (B), 2) (B) ... (C), 3) (C) ... (D), 4) (A) ... (D).

Exercice I Soit X une variable aléatoire discrète ne pouvant prendre que les valeurs $-2, -1, 1$ et 2. On suppose que

$$\mathbb{P}(X < 1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(x > 1) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X \le -2) = \mathbb{P}(X = -1).$$

1) Déterminer la loi de X.
2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $Var(X)$.

Exercice II Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi géometrique de paramètre p, $0 < p < 1$. On note $Z = \min\{X, Y\}$ et $W = X - Y$.

1) Déterminer les probabilités $P(Z = n, W = k)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on pourra discuter suivant le signe de k.
2) En déduire la loi de Z et la loi de W.
3) Montrer que les variables aléatoires Z et W sont indépendantes.

Exercice III Achille tire à l'arc sur une cible circulaire de rayon unité. On suppose qu'Achille est suffisamment maladroit pour que le point M d'impact de la flèche soit uniformement distribué sur le cible : les coordonnées cartésiennes de $M \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$ constituent un couple des variables aléatoires (X, Y) de densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) \ = \ \alpha \mathbb{1}_D(x, y)$$

(1) Déterminer la constante α.
(2) Trouver la densité de X et la densité de Y.
(3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
(4) Soient (R, θ) les coordonnées polaires de $M = (X, Y)$, on note $f_{(R,\theta)}(r, t)$ la densité du couple (R, θ).
  (a) Montrer que $f_{(R,\theta)}(r, t) = \frac{r}{\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(t) \mathbb{1}_{[0,1]}(r)$.
  (b) En déduire la densité de la variable R et la densité de la variable θ
  (c) Les variables aléatoires R et θ sont-elles indépendantes?
  (d) Calculer $\mathbb{E}(R)$ et $Var(R)$.

Exercice III

Hector tire à l'arc une à une 100 flèches sur une cible circulaire de rayon unité. On note R_i la distance entre le point d'impact de sa i-ième flèche et le centre de la cible. On suppose que les variables aléatoires $R_1, \ldots R_{100}$ sont indépendantes et de même loi déterminée par leur fonction de répartition F :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (8x - 3x^2)/5 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Le i-ième tire est considéré comme réussi si $R_i < 2/3$. On pose $\xi_i \ = \begin{cases} 1 & \text{si } R_i < 2/3, \\ 0 & \text{si } R_i \ge 2/3. \end{cases}$

(1) Déterminer l'espérance et la variance de ξ_i
(2) Par quelle loi peut-on approximer la loi de la variable aléatoire $Z \ = \ \dfrac{\xi_1 + \cdots \xi_{100} - 80}{4}$? Justifier votre réponse.
(3) Exprimer le nombre de tirs réussis en fonction de $\xi_1, \ldots, \xi_{100}$.
(4) Calculer la probabilité que au moins 75 tirs soient réussis.

(FIN)