Université de Cergy-Pontoise - Licence de mathématique
Examen Probabilité - 13 décembre 2011

Questions de cours : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On note F_n la fonction de répartition de la variable X_n, et Φ_n sa fonction caractéristique.

Compléter :

1) La suite X_n converge en loi vers une variable X si et seulement si la suite $F_{X_n}(x)$ ...
2) La suite X_n converge en loi vers une variable X si et seulement si la suite $\Phi_n(t)$ ...

Exercice I Soit (X,Y) un couple de variable aléatoire de densité f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} C\,e^{-y} & \text{si} \quad 0 < x < y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Déterminer la constante C pour que f soit une densité d'une loi de probabilité.
2) Déterminer la densité de X et la densité de Y.
3) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$ et $Cov(X,Y)$.
4) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
5) Déterminer la densité du couple de variables aléatoires $(\frac{X}{Y}, Y)$.
6) De'terminer la loi de $\frac{X}{Y}$.
7) Montrer que $\frac{X}{Y}$ et Y sont indépendantes.

Exercice II Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien centré, de la matrice de covariance

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Identifier la loi de X et la loi de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
2) Soit $a \in \mathbb{R}$ calculer $Cov(X, X + aY)$.
3) Soit $a \in \mathbb{R}$ montrer que $\begin{pmatrix} X \\ X + aY \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien.
4) Déterminer a^* pour que X et $X + a^*Y$ soient indépendantes.

Exercice III Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n(\Omega) = \left\{-\frac{1}{2^n}, +\frac{1}{2^n}\right\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(X_n = -\frac{1}{2^n}\right) = \mathbb{P}\left(X_n = \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1) Calculer l'espérance, la variance et la fonction caractéristique $\Phi_{X_n}(t)$ de X_n.
2) En déduire l'espérance, la variance et la fonction caractéristique $\Phi_{S_n}(t)$ de S_n.
3) En utilisant la formule $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$ montrer par récurrence que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \neq 0$,
$$\Phi_{S_n}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \, \frac{\frac{t}{2^n}}{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$
en déduire la limite $\Phi(t) = \lim_{n\to\infty} \Phi_{S_n}(t)$.
4) Déterminer la fonction caractéristique d'un loi uniforme sur un intervalle $[-c, c]$.
5) Montrer que la suite (S_n) converge en loi et préciser la loi limite.

(FIN)