Corrigé — Examen de probabilité — 13/12/2011 — 1

Questions de cours

1) La suite de v.a X_n converge en loi vers une v.a X si et seulement si $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$ quand $(n\to\infty)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ où la fonction F_X est continue

2) —— " —— $\iff \varphi_{X_n}(t) \longrightarrow \varphi_X(t)\ (n\to\infty)$ $\forall\ t\in\mathbb{R}$.

Exercice 1

1) f est une densité d'une loi de probabilité $\iff$

$f \geq 0$ et $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = C\iint_{\mathcal{D}} e^{-y}\,dx\,dy$$ où $\mathcal{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<y\}$

$$\Rightarrow C^{-1} = \iint_{\mathcal{D}} e^{-y}\,dx\,dy = \int_0^{\infty} e^{-y}\left(\int_0^y x\,dx\right)dy = \int_0^{+\infty} y e^{-y}\,dy =$$

$$\underset{(I.P.P.)}{=} \left[-ye^{-y}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y}\,dy = \left[-e^{-y}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$\Rightarrow \underline{\underline{C=1}}$

2) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_x^{+\infty} e^{-y}\,dy = \underline{e^{-x} \text{ si } x>0} \text{ et } \underline{f_X(x)=0 \text{ si } x\leq 0}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^y e^{-y}\,dx = \underline{ye^{-y} \text{ si } y>0}$$

et $\underline{f_Y(y)=0 \text{ si } y\leq 0}$

3) $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) = \int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx \ \underline{\underline{=1}}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^{+\infty} y^2 e^{-y}\,dy \underset{IPP}{=} \left[-y^2 e^{-y}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{\infty} y e^{-y}\,dy = \underline{\underline{2}}$$

$$\mathbb{E}(X\cdot Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f_{\binom{X}{Y}}(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} xy e^{-y}\,dx\,dy = \int_0^{\infty} y e^{-y} \int_0^{y} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} y^3 e^{-y}\,dy =$$

$$\underset{(IPP)}{=} \left[-\frac{1}{2} y^3 e^{-y}\right]_0^{\infty} + \frac{3}{2}\int_0^{\infty} y^2 e^{-y}\,dy = \underline{\underline{3}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$$

4) $f_X(x)\, f_Y(y) \neq f(x,y) \Rightarrow X$ et Y ne sont pas indépendantes

(ou une autre méthode : $\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0 \Rightarrow X$ et Y ne sont pas indépendantes)

5) Soit $Z = \frac{X}{Y}$. Pour tout fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continues et bornée,

$$\mathbb{E}(h(Z,Y)) = \mathbb{E}\left(h\left(\frac{X}{Y}, Y\right)\right) = \iint_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{x}{y}, y\right) f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} h\left(\frac{x}{y}, y\right) e^{-y}\,dx\,dy \underset{\uparrow}{=}$$

changement de variables: $z = \frac{x}{y}$, $y' = y$

$$\begin{cases} x = zy \\ y' = y \end{cases} \qquad dx\,dy = |J|\,dz\,dy' \quad \text{où } |J| = \left|\det\begin{pmatrix} y & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = |y|$$

$$\mathcal{D}\ \{0 < x < y\} \iff \{y' > 0,\ 0 < z < 1\} = \tilde{\mathcal{D}}$$

$$= \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} h(z,y')\, y'\,dz\,dy' = \iint_{]0,1[\times]0,+\infty[} e^{-y'} y'\, h(z,y')\,dz\,dy'$$

$$\Rightarrow f_{\binom{Z}{Y}}(z,y) = y e^{-y} \mathbb{1}_{]0,1[}(z) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

6) $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\binom{Z}{Y}}(z,y)\,dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(z)$$

$$\Rightarrow Z \sim \text{Uniforme}([0,1])$$

7) $f_{\binom{Z}{Y}}(z,y) = f_Z(z) f_Y(y) \Rightarrow X$ et Y sont independantes

<u>Exercice 2</u> 1) $X \sim \mathcal{N}(0,5)$, $Y \sim \mathcal{N}(0,5)$

$Cov(X,Y) = 3 \Rightarrow X$ et Y ne sont pas independantes

2) $Cov(X, X+aY) = Cov(X,X) + a\, Cov(X,Y) = 5 + 3a$

3) $$\begin{pmatrix} X \\ X+aY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

ou $\binom{X}{Y}$ est un vecteur gaussien

$\Rightarrow \binom{X}{X+aY}$ est aussi un vecteur gaussien.

4) X et $X+a^*Y$ sont independantes $\Leftrightarrow$

$Cov(X, X+a^*Y) = 0$ car $\binom{X}{X+a^*Y}$ est un vecteur gaussien

$\Leftrightarrow 5 + a^* \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a^* = -3/5}}$

<u>Exercice 3</u> $\mathbb{E}(X_n) = -\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{0}}$

$Var(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - [\mathbb{E}(X_n)]^2 = \mathbb{E}(X_n^2) = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2}}$

$$\varphi_{X_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itX_n}) = \frac{1}{2} e^{it/2^n} + \frac{1}{2} e^{-it/2^n} = \cos\left(\frac{t}{2^n}\right)$$

2) $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n) = 0$

par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \dots + \mathrm{Var}(X_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^n}\right)^2$$

car les v.a $X_1, \dots X_n$ sont independantes

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{3/4}$$

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \dots \varphi_{X_n}(t)$$

car les v.a $X_1, \dots X_n$ sont independantes

$$= \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{4}\right) \dots \cos\left(\frac{t}{2^n}\right)$$

3)

$$2 \cdot \varphi_{S_n}(t) \cdot \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right) \cos\left(\frac{t}{2^n}\right) \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{t}{2}\right) \dots \cos\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right) \sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)$$

$$= \varphi_{S_{n-1}}(t) \sin\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)$$

$\Rightarrow$ par recurrence

$$2^{n-1} \varphi_{S_n}(t) \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2^n \varphi_{S_n}(t) \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) = \sin(t) \Rightarrow \varphi_{S_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$$

$$\varphi_{S_n}(t) = \frac{\sin(t)}{t} \frac{t/2^n}{\sin(t/2^n)} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{\sin(t)}{t}$$

car $\frac{t}{2^n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$

et $\frac{x}{\sin(x)} \longrightarrow 1$ quand $x \longrightarrow 0$.

4) $X \sim \text{Uniforme}([-c,c]) \iff$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} e^{itx}\,dx = \frac{\sin(tc)}{tc}$$

5) $\varphi_{S_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\sin(t)}{t} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$

où $\frac{\sin(t)}{t}$ est la fonction caractéristique de la loi Uniforme$([-1,1])$

$\Rightarrow$ S_n converge en loi vers une v.a X de la loi Uniforme $([-1,1])$