Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques,
Examen de Probabilité - L3, 4 janvier 2011, durée 3 heures

Exercice 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = c\,\mathbf{1}_{[0,1]}(x)e^{-x}$.

1) Déterminer la constante c pour que f soit une densité d'une loi de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire suivant une loi admettant f pour densité. Calculer l'espérance, le variance et la fonction caractéristique de X.
3) Soit Y une variable aléatoire de la loi exponentielle du paramètre $\lambda > 0$, indépendante de X. Calculer la densité de la variable $Z = X + Y$.

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov (X_n) sur l'espace d'états $\{1, 2, 3, 4\}$ avec la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Décrire le graphe associé à la chaîne (X_n).
2) Cette chaîne de Markov est elle irréductible? Déterminer la période de chaque état.
3) Calculer la loi invariante.
4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mu_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \varepsilon_n)$ la loi de X_n :
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \alpha_n, \quad \mathbb{P}(X_n = 2) = \beta_n, \quad \mathbb{P}(X_n = 3) = \gamma_n, \quad \mathbb{P}(X_n = 4) = \varepsilon_n$$
et on suppose que $\mu_0 = (1, 0, 0, 0)$. Calculer μ_1 et μ_2.
5) Formuler le théorème de Doeblin et vérifier que la chaîne de Markov (X_n) vérifie ses conditions.
6) Calculer les limites $\alpha = \lim_n \alpha_n$, $\beta = \lim_n \beta_n$, $\gamma = \lim_n \gamma_n$ et $\varepsilon = \lim_n \varepsilon_n$

Exercice 3. (*Inégalité de Hoeffding pour des variables aléatoires de Bernoulli*)

(1) On pose $f(t) = \log(pe^t + 1 - p)$.
   a) Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ et préciser $f(0)$ et $f'(0)$.
   b) Montrer que $f''(t) \le 1/4$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   c) En déduire que $f(t) \le pt + t^2/8$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) Soit X une variable aléatoire de Bernoulli du paramètre $p > 0$. Calculer $\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$ et montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\left(e^{t(X-p)}\right) \le \exp\left(t^2/8\right)$$

(3) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de la même loi de Bernoulli du paramètre $p > 0$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   a) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\left(e^{t(S_n - np)}\right) \le \exp\left(t^2 n/8\right)$$
   b) Citer l'inégalité de Markov et montrer que pour tous $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{P}\Big(t(S_n - np) > tn\varepsilon\Big) \le \exp\left(-\varepsilon nt + \frac{t^2 n}{8}\right)$$
   (*Indication*: Appliquer l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie)

   c) Vérifier que pour tout $\varepsilon > 0$ et $t > 0$
$$\mathbb{P}\left(|S_n - np| > n\varepsilon\right) \le \mathbb{P}\Big((S_n - np) > n\varepsilon\Big) + \mathbb{P}\Big((S_n - np) < -n\varepsilon\Big) \le 2\exp\left(-\varepsilon nt + \frac{t^2 n}{8}\right)$$
   d) Trouver minimum de la fonction $h(t) = -\varepsilon t + \dfrac{t^2}{8}$ et en déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbb{P}\left(|S_n - np| > n\varepsilon\right) \le 2\exp\left(-2n\varepsilon^2\right)$$