Université de Cergy-Pontoise, Mathématiques,
Examen de Probabilité - L3, 13 janvier 2011, durée 3 heures

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de la même loi uniforme sur $[a, b]$.

1) Écrire la densité de la variable aléatoire X_1, puis calculer son éspérance et la variance.
2) On pose $V_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Trouver la fonction de répartition de V_n et en déduire la limite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|V_n - b| \geq \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
3) Calculer la densité, l'éspérance et la variance et la fonction caract éristique de V_n.

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov (X_n) sur l'espace d'états $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Décrire le graphe associé à la chaîne (X_n).
(2) Cette chaîne de Markov est elle irréductible? Déterminer la période de chaque état.
(3) Calculer la loi invariante.
(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mu_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \varepsilon_n, \theta_n)$ la loi de X_n :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \alpha_n,\ \mathbb{P}(X_n = 2) = \beta_n,\ \mathbb{P}(X_n = 3) = \gamma_n,\ \mathbb{P}(X_n = 4) = \varepsilon_n,\ \mathbb{P}(X_n = 5) = \theta_n$$

et on suppose que $\mu_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$. Calculer μ_1 et μ_2.
(5) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{n+1} = (1 - \alpha_n)/4,$$

(6) Verifier que la suite $z_n = \alpha_n - 1/5$ est géométrique et en déduire la limite $\alpha = \lim_n \alpha_n$.
(7) Formuler le théorème de Doeblin et vérifier que la chaîne de Markov (X_n) vérifie ses conditions.
(8) Calculer les limites $\beta = \lim_n \beta_n$, $\gamma = \lim_n \gamma_n$, $\varepsilon = \lim_n \varepsilon_n$ et $\theta = \lim_n \theta_n$.

Exercice 3.

(1) On pose $f(t) = \log(pe^t + 1 - p)$, $f^*(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\big(xt - f(t)\big)$, $f^*_+(x) = \sup_{t\geq 0}\big(xt - f(t)\big)$ et $f^*_-(x) = \sup_{t\leq 0}\big(xt - f(t)\big)$. Calculer $f^*(x)$, $f^*_+(x)$ et $f^*_-(x)$ pour
  a) $0 < x < p$
  b) $x = p$
  c) $p < x < 1$.
(2) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de la même loi de Bernoulli du paramètre $p > 0$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
  a) Calculer $\mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$ et en déduire $\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right)$.
  b) Citer l'inégalité de Markov et montrer que pour tous $x > 0$ et $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) \ \leq\ \exp\Big(-n\big(xt - f(t)\big)\Big)$$

(*Indication*: Appliquer l'inégalité de Markov à une variable aléatoire bien choisie)

  c) En déduire que pour $x \in [p, 1[$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) \ \leq\ \exp(-nf^*(x))$$

  d) Montrer que pour $x \in]0, p]$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq x\right) \ \geq\ 1 - \exp(-nf^*(x)).$$