L3 Mathématiques
16 Décembre 2013

Examen de Méthodes Variationnelles

Durée: 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le barême suivant est donné à titre <u>indicatif</u> : 5+4+4+7=20.

Question de cours. Énoncer et démontrer le théorème sur la différentiabilité des fonctions composées.

Exercice 1. On considère l'espace $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels. On munit E de la norme N définie par, si $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$,

$$N(M) = \max\{|m_{11}|, |m_{12}|, |m_{21}|, |m_{22}|\}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on considère l'application $\varphi_A : E \to E$ définie par

$$\varphi_A(M) = AM.$$

a) Justifier que φ_A est une application linéaire continue.
b) Rappeler la définition de $|||\varphi_A|||$ et montrer que $|||\varphi_A||| = 7$.
On rappelle qu'une norme N sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dite matricielle s'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$N(M) = \sup_{X \in \mathbb{R}^2,\, \|X\| \leq 1} \|MX\|.$$

c) Montrer que si N était une norme matricielle on aurait $|||\varphi_A||| \leq N(A)$.
d) En déduire que N n'est pas une norme matricielle.

Exercice 2. Soient f et g définies par $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$. On note $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x,y) = 0\}$.
a) Montrer que $\Gamma \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$.
b) Justifier que f possède un minimum global et un maximum global sur Γ.
c) Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ. (On pourra être amené à résoudre un système ayant 8 solutions.)
d) L'ensemble Γ est une courbe dans le plan. Que représentent géométriquement le minimum et le maximum trouvés à la question b).

Exercice 3. On considère l'espace $E = C^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On rappelle que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. On considère l'application $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(f) = \cos \circ f$, i.e. $\varphi(f)$ est la fonction définie par

$$(\varphi(f))(x) = \cos(f(x)).$$

a) Montrer que pour tous a et t dans $\mathbb{R}$ on a

$$|\cos(a+t) - \cos(a) + t\sin(a)| \leq \frac{t^2}{2}.$$

b) Soit $f \in E$. Montrer que φ est différentiable en f de différentielle l'application $L : h \mapsto L(h)$ où, pour tout $h \in E$, $L(h) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par

$$L(h) : x \mapsto -h(x)\sin\left(f(x)\right).$$

c) Montrer que φ est de classe C^1. Indication: on pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\sin$.

d) Soit $f_0 \in E$ définie par $f_0(x) = 1 + x$.

$i)$ Montrer que $D\varphi(f_0)$ est bijective de E dans E.

$ii)$ Montrer que φ est localement inversible au voisinage de f_0.

e) Soit $f_1 \in E$ définie par $f_1(x) = x$. Peut-on appliquer le théorème d'inversion locale en f_1? Justifiez votre réponse.

f) Étant donnée $f \in E$, donner une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir appliquer le théorème d'inversion locale en f.