L3 Mathématiques
16 décembre 2013

Examen de Méthodes Variationnelles : corrigé

Question de cours. Voir polycopié

Exercice 1. *On considère l'espace $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2 à coefficients réels. On munit E de la norme N définie par, si $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$,*

$$N(M) = \max\{|m_{11}|, |m_{12}|, |m_{21}|, |m_{22}|\}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on considère l'application $\varphi_A : E \to E$ définie par

$$\varphi_A(M) = AM.$$

a) *Justifier que φ_A est une application linéaire continue.*

Soient $M, M' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_A(M + \lambda M') = A \times (M + \lambda M') = AM + \lambda AM' = \varphi_A(M) + \lambda \varphi_A(M'),$$

donc φ_A est linéaire. Comme $E = M_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie ($\dim(E) = 4$), φ_A est continue.

b) *Rappeler la définition de $|||\varphi_A|||$ et montrer que $|||\varphi_A||| = 7$.*

Par définition, $|||\varphi_A||| = \sup\limits_{M \neq 0} \dfrac{N(\varphi_A(M))}{N(M)} = \sup\limits_{N(M) \leq 1} N(\varphi_A(M)) = \sup\limits_{N(M)=1} N(\varphi_A(M))$.

Soit $M \in E$, on calcule

$$\varphi_A(M) = AM = \begin{pmatrix} 2m_{11} - m_{21} & 2m_{12} - m_{22} \\ 3m_{11} + 4m_{21} & 3m_{12} + 4m_{22} \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{aligned} N(AM) &= \max\{|2m_{11} - m_{21}|, |2m_{12} - m_{22}|, |3m_{11} + 4m_{21}|, |3m_{12} + 4m_{22}|\} \\ &\leq \max\{2|m_{11}| + |m_{21}|, 2|m_{12}| + |m_{22}|, 3|m_{11}| + 4|m_{21}|, 3|m_{12}| + 4|m_{22}|\} \\ &\leq \max\{3N(M), 3N(M), 7N(M), 7N(M)\} \\ &= 7N(M). \end{aligned}$$

On en déduit que $|||\varphi_A||| \leq 7$. Par ailleurs, si on prend $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $N(M) = 1$ et $AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ d'où $N(AM) = 7$ et donc $|||\varphi_A||| \geq 7$. Finalement, $|||\varphi_A||| = 7$.

On rappelle qu'une norme N sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dite matricielle s'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$N(M) = \sup_{X\in\mathbb{R}^2,\,\|X\|\le 1} \|MX\|.$$

c) *Montrer que si N était une norme matricielle on aurait $|||\varphi_A||| \le N(A)$.*

Si N est une norme matricielle, elle vérifie $N(AM) \le N(A)N(M)$ pour tous $A, M \in M_2(\mathbb{R})$. Et donc

$$|||\varphi_A||| = \sup_{N(M)\le 1} N(\varphi_A(M)) = \sup_{N(M)\le 1} N(AM) \le \sup_{N(M)\le 1} N(A)N(M) = N(A).$$

d) *En déduire que N n'est pas une norme matricielle.*

On a vu au b) que $|||\varphi_A||| = 7$. Mais on a $N(A) = 4$. D'après c), N ne peut pas être une norme matricielle puisque $|||\varphi_A||| > N(A)$.

Exercice 2. *Soient f et g définies par $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$. On note $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x,y) = 0\}$.*

a) *Montrer que $\Gamma \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \le 1$ et $|y| \le 1\}$.*

Soit $(x,y) \in \Gamma$. On a $x^4 + y^4 = 1$. Comme $y^4 \ge 0$ on a $x^4 \le 1$ et donc $|x| \le 1$. De même $x^4 \ge 0$ donc $y^4 \le 1$ et ainsi $|y| \le 1$.

b) *Justifier que f possède un minimum global et un maximum global sur Γ.*

D'après a) l'ensemble Γ est borné. De plus la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue et $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ donc $\Gamma = g^{-1}(\{0\})$ est fermé. L'ensemble Γ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie donc Γ est compact.

La fonction f est continue et Γ est compact, donc f possède un minimum global et un maximum global sur Γ.

c) *Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ. (On pourra être amené à résoudre un système ayant 8 solutions.)*

On va chercher à appliquer le théorème des extrema liés. Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}^2$ qui est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f est de classe C^1. Il faut encore vérifier que Γ est une contrainte régulière:

- La fonction g est bien de classe C^1.
- La jacobienne $Jg_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 4x^3 & 4y^3 \end{pmatrix}$ de g est de rang 1 si et seulement si $(x,y) \neq (0,0)$. Comme $(0,0) \notin \Gamma$, $Jg_{(x,y)}$ est de rang 1 pour tout $(x,y) \in \Gamma$.

Le théorème des extrema liés permet d'affirmer que si (x,y) est un extremum de f sur Γ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& \lambda\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &=& \lambda\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x &=& \lambda 4x^3 \\ 2y &=& \lambda 4y^3 \\ x^4+y^4 &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x(1-2\lambda x^2) &=& 0 \\ y(1-2\lambda y^2) &=& 0 \\ x^4+y^4 &=& 1 \end{array}\right.$$

La première équation donne $x = 0$ ou $2\lambda x^2 = 1$ et la deuxième $y = 0$ ou $2\lambda y^2 = 1$. Si $x = 0$, avec la contrainte on trouve $y = \pm 1$ et donc avec la deuxième équation $\lambda = 1/2$. Si $y = 0$, de même avec la contrainte on trouve $x = \pm 1$ et avec la première équation on a $\lambda = 1/2$. Finalement si $2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 1$, on obtient $x^2 = y^2 = \frac{1}{2\lambda}$, en particulier $\lambda > 0$. On remplace dans la contrainte et on obtient $\lambda^2 = 1/2$ et donc ($\lambda > 0$) on a $\lambda = 1/\sqrt{2}$. Ainsi $x^2 = y^2 = 1/\sqrt{2}$ et donc $x = \pm 2^{-1/4}$ et $y = \pm 2^{-1/4}$.

On a ainsi 8 solutions: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(2^{-1/4}, 2^{-1/4})$, $(2^{-1/4}, -2^{-1/4})$, $(-2^{-1/4}, 2^{-1/4})$ et $(-2^{-1/4}, -2^{-1/4})$.

Pour déterminer le maximum et le minimum de f, on calcule la valeur de f en chacun de ces 8 points. On trouve que

$$f(1,0) = f(-1,0) = f(0,1) = f(0,-1) = 1$$

et

$$f(2^{-1/4}, 2^{-1/4}) = f(2^{-1/4}, -2^{-1/4}) = f(-2^{-1/4}, 2^{-1/4}) = f(-2^{-1/4}, -2^{-1/4}) = \sqrt{2}.$$

Le minimum de f sur Γ est donc 1 et son maximum $\sqrt{2}$.

d) *L'ensemble Γ est une courbe dans le plan. Que représentent géométriquement le minimum et le maximum trouvés à la question b).*

$f(x,y) = x^2 + y^2$ représente le carré de la distance du point (x,y) au point $O(0,0)$. Le minimum de f sur Γ est donc le carré de la distance minimum entre O et Γ et le maximum de f sur Γ le carré de la distance maximum entre O et Γ.

Exercice 3. *On considère l'espace $E = C^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On rappelle que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. On considère l'application $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(f) = \cos \circ f$, i.e. $\varphi(f)$ est la fonction définie par*

$$(\varphi(f))(x) = \cos(f(x)).$$

a) *Montrer que pour tous a et t dans $\mathbb{R}$ on a*

$$|\cos(a+t) - \cos(a) + t\sin(a)| \leq \frac{t^2}{2}.$$

On applique la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\cos$ entre a et $a+t$ à l'ordre 2: la dérivée de $\cos$ est $-\sin$ et sa dérivée seconde est $-\cos$ donc il existe α entre a et $a+t$ tel que

$$\cos(a+t) = \cos(a) - t\sin(a) - \frac{t^2}{2}\cos(\alpha).$$

On en déduit que

$$|\cos(a+t) - \cos(a) + t\sin(a)| = \frac{t^2}{2}|\cos(\alpha)| \leq \frac{t^2}{2}.$$

b) *Soit $f \in E$. Montrer que φ est différentiable en f de différentielle l'application $L : h \mapsto L(h)$ où, pour tout $h \in E$, $L(h) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction donnée par*

$$L(h) : x \mapsto -h(x)\sin\left(f(x)\right).$$

Il faut montrer que L est une application linéaire continue et que $\varphi(f+h) - \varphi(f) - L(h) = o(h)$.

- On vérifie aisément que L est linéaire. Par ailleurs, pour tout $h \in E$ et pour tout $x \in [0,1]$ on a
$$|L(h)(x)| = |h(x)| \times |\sin(f(x))| \leq |h(x)|,$$
et donc $\|L(h)\|_\infty \leq \|h\|_\infty$. Ainsi L est bien continue (et $|||L||| \leq 1$).
- Soit maintenant $h \in E$ et $x \in [0,1]$. On applique a) avec $a = f(x)$ et $t = h(x)$. On obtient
$$|\varphi(f+h)(x) - \varphi(f)(x) - L(h)(x)| = |\cos(f(x)+h(x)) - \cos(f(x)) + h(x)\sin(f(x))| \leq \frac{h(x)^2}{2},$$
et donc
$$\|\varphi(f+h) - \varphi(f) - L(h)\|_\infty \leq \frac{\|h\|_\infty^2}{2}.$$
d'où $\dfrac{\|\varphi(f+h) - \varphi(f) - L(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} \xrightarrow{h \to 0} 0$.

c) *Montrer que φ est de classe C^1. Indication: on pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction* $\sin$.

On sait que φ est différentiable, il reste à montrer que $D\varphi$ est continue. Soient $f, g \in E$, on a
$$\begin{aligned} |||D\varphi(f) - D\varphi(g)||| &= \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} \|D\varphi(f)(h) - D\varphi(g)(h)\|_\infty \\ &= \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} \left(\sup_{x\in[0,1]} |-h(x)\sin(f(x)) + h(x)\sin(g(x))| \right) \\ &\leq \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} \left(\underbrace{\sup_{x\in[0,1]} |h(x)|}_{=\|h\|_\infty} \times \sup_{x\in[0,1]} |\sin(f(x)) - \sin(g(x))| \right) \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |\sin(f(x)) - \sin(g(x))|. \end{aligned}$$
On applique l'inégalité des accroissements finis à $\sin$ entre $f(x)$ et $g(x)$. Sa dérivée est $\cos$ qui vérifie $|\cos(t)| \leq 1$ pour tout t donc $|\sin(f(x)) - \sin(g(x))| \leq |f(x) - g(x)|$. Finalement on a
$$|||D\varphi(f) - D\varphi(g)||| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty.$$

Étant donné $\epsilon > 0$, si $\|f - g\|_\infty < \epsilon$ on a $|||D\varphi(f) - D\varphi(g)||| < \epsilon$, ce qui prouve que $D\varphi$ est continue (et même uniformément continue sur E).

d) *Soit $f_0 \in E$ définie par $f_0(x) = 1 + x$.*

$i)$ *Montrer que $D\varphi(f_0)$ est bijective de E dans E.*

Si $h \in E$, $D\varphi(f_0)(h) : x \mapsto -h(x)\sin(1+x)$. Étant donnée $k \in E$ on cherche donc $h \in E$ tel que $D\varphi(f_0)(h) = k$, c'est-à-dire $-h(x)\sin(1+x) = k(x)$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme la fonction $\sin(1+x)$ ne s'annule pas sur $[0,1]$,
$$-h(x)\sin(1+x) = k(x) \iff h(x) = -\frac{k(x)}{\sin(1+x)}.$$
Cette dernière est bien une fonction continue sur $[0,1]$ donc k admet un unique antécédent par $D\varphi(f_0)$. Ansi $D\varphi(f_0)$ est bien bijective de E dans E.

$ii)$ *Montrer que φ est localement inversible au voisinage de f_0.*

On cherche à appliquer le Théorème d'inversion locale à φ en f_0 : E est bien un Banach (cf énoncé) et φ est de classe C^1 (cf c)). Par ailleurs $D\varphi(f_0)$ est bijective d'après la question i). Il reste à montrer que $(D\varphi(f_0))^{-1}$ est continue. Si $k \in E$ on a, cf i), $(D\varphi(f_0))^{-1}(k)$: $x \mapsto -\dfrac{k(x)}{\sin(1+x)}$ et donc $\|(D\varphi(f_0))^{-1}(k)\|_\infty \leq \left\|\dfrac{1}{\sin(1+x)}\right\|_\infty \times \|k\|_\infty$ (la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin(1+x)}$ est bien dans E puisque $\sin(1+x)$ ne s'annule pas). D'où $(D\varphi(f_0))^{-1}$ est continue (de norme inférieure ou égale $\left\|\dfrac{1}{\sin(1+x)}\right\|_\infty$). On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale à φ en f_0.

e) *Soit $f_1 \in E$ définie par $f_1(x) = x$. Peut-on appliquer le théorème d'inversion locale en f_1? Justifiez votre réponse.*

Pour pouvoir appliquer le théorème en f_1 il faut en particulier que $D\varphi(f_1)$ soit bijective de E dans E. On remarque que $f_1(0) = 0$ et donc en particulier $\sin(f_1(0)) = 0$. Ainsi, quelque soit $h \in E$, on a $(D\varphi(f_1)(h))(0) = -h(0)\sin(f_1(0)) = 0$. L'image de n'importe quelle fonction h est une fonction qui s'annule en 0. $D\varphi(f_1)$ n'est donc pas surjective de E dans E (les fonctions ne s'annulant pas en 0 n'ont pas d'antécédent) et donc pas bijective. On ne pourra pas appliquer le théorème en f_1.

f) *Étant donnée $f \in E$, donner une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir appliquer le théorème d'inversion locale en f.*

On va montrer qu'on peut appliquer le théorème en f si et seulement si la fonction $\sin(f(x))$ ne s'annule pas sur $[0,1]$, i.e. $f(x) \notin \pi\mathbb{Z}$ pour tout $x \in [0,1]$.

- Si $\sin(f(x))$ s'annule en $x_0 \in [0,1]$, par le même raisonnement qu'au e) on montre que pour tout $h \in E$ on aurait $(D\varphi(f)(h))(x_0) = 0$ et donc $D\varphi(f)$ ne pourra pas être surjective et donc pas bijective. On ne pourra donc pas appliquer le théorème.
- Si maintenant $\sin(f(x))$ ne s'annule pas sur $[0,1]$, on raisonne comme au d). On montre que $D\varphi(f)$ est bijective et que sa réciproque est définie par, si $k \in E$: $(D\varphi(f))^{-1}(k)$: $x \mapsto -\dfrac{k(x)}{\sin(f(x))}$. Cette dernière est bien dans E puisque $\sin(f(x))$ ne s'annule pas. Il reste alors à montrer que $(D\varphi(f))^{-1}$ est continue, c'est le même raisonnement qu'au d)ii), on a
$$\|(D\varphi(f))^{-1}(k)\|_\infty \leq \left\|\frac{1}{\sin(f)}\right\|_\infty \times \|k\|_\infty$$
et donc $(D\varphi(f))^{-1}$ est continue (de norme inférieure ou égale $\left\|\dfrac{1}{\sin(f)}\right\|_\infty$).