Examen de méthodes variationnelles 20 décembre 2012

Exercice 1:

Le vecteur x de $\mathbb{R}^n$ étant donné, on lui associe l'application $T_x = T$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $Ty = \sum_1^n x_i y_i$.
1) Montrer que T est linéaire et continue
2)Montrer que $\|T_x\|_\infty$, norme de T_x associée à la norme $\|.\|_\infty$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifie $\|T_x\|_\infty \leq \|x\|_1$. Déterminer cette norme.
3) Montrer que $\|T_x\|_2$, norme de T_x associée à la norme $\|.\|_2$ dans $\mathbb{R}^n$ vérifie $\|T_x\|_\infty \leq \|x\|_2$. Déterminer cette norme.

Exercice 2:

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$. On munit E de la norme $|f|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Soit T définie sur E par

$$T(f)(x) = 2f(0) + \int_0^x f(t)dt$$

1) Montrer que T est linéaire.
2) Montrer que $T(f)$ est continue, et que $|T(f)|_\infty \leq 3|f|_\infty$.
3) En déduire que T est continue et montrer que sa norme dans $\mathcal{L}(E)$ est exactement égale à 3.
4) Montrer que T est injective.
5) Remarquer que l'image de T est dans l'espace des fonctions continument dérivables. T est elle surjective?

Exercice 3:

On considère la courbe dans $\mathbb{R}^2$ $(x,y) \mapsto \log(1 + x^2y^2) - \arctan(x+y)$

Montrer qu'au voisinage de $(0,0)$ la courbe peut s'écrire $x = \varphi(y)$. Calculer la dérivée de φ.

Exercice 4: Sur l'espace $\mathcal{C}^1([0,1])$, on définit φ par pour $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$,

$$\varphi(f)(x) = f^3(x) + 2f'(x)$$

Montrer que φ est continue de $\mathcal{C}^1([0,1])$, muni de la norme $|f|_{\mathcal{C}^\infty} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ dans $\mathcal{C}([0,1])$, muni de la norme $|f|_{\mathcal{C}} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Montrer que φ est différentiable. Montrer que $D\varphi(0)$ est un homéomorphisme de $\mathcal{C}^1([0,1])$ sur $\mathcal{C}([0,1])$. En déduire l'existence de $\delta > 0$ tel que si $|f|_\infty \leq \delta$, il existe $h \in \mathcal{C}^1([0,1])$ tel que $h^3 + 2h' = f$.