Examen Méthodes variationnelles , jeudi 15 décembre 2011

Exercice 1
On considère l'espace

$$X = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1]), f(0) = 0\}.$$

Soit

$$N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$$

1) Montrer que N est une norme sur X.
2) On considère ϕ définie par

$$\phi(f) = \int_0^1 f(t)dt + f'(0)$$

Montrer que ϕ est une forme linéaire continue sur (X, N).
3) Montrer que la norme de ϕ est ≤ 2.

Exercice 2 :
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$. Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout $(x,y) \neq (0,0)$.
2) Montrer qu'elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et les calculer.
3) En déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3 :
Chercher les extrema de la fonction

$$f(x,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4.$$

On trouvera deux maxima locaux. On montrera que $(0,0)$ n'est pas un extremum.

Que vaut le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 :

On considère la fonction

$$f(x,y) = \arctan(x+y) - \log(1 + x^2y^2)$$

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.

2) On considère la courbe

$$f(x,y) = 0.$$

Montrer que $(0,0)$ appartient à la courbe et qu'il existe un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction φ définie sur ce voisinage, à valeurs dans un voisinage de 0, telle que la courbe $f(x,y) = 0$ s'écrit $y = \varphi(x)$.

Exercice 5 :

On considère à nouveau

$$X = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1]), f(0) = 0\}.$$

On rappelle que d'après l'exercice 1, $N(f) = |f'|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ est une norme sur X. On admet que cette norme fait de X un espace complet.

1) Soit ϕ définie par $\phi(f)(x) = f'(x) + \int_0^x f^2(t)dt$.

On munit $\mathcal{C}([0,1])$ de la norme infinie. Montrer que ϕ est continue sur X à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1])$.

2) Que vaut $\phi(0)$?

3) Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle. Montrer que $d\phi(0)$ est un homéomophisme.

4) En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$, et $\delta > 0$, telle pour tout $g \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $|g|_\infty \leq \epsilon$, il existe un et un seul $f \in X$, tel que $N(f) \leq \delta$ et tel que pour tout $x \in [0,1]$ $f'(x) + \int_0^x f^2(t)dt = g(x)$.