Examen Méthodes variationnelles, Jeudi 16 décembre 2010

Exercice 1 :

Soit $X = \{f \in \mathcal{C}([0,1]), f(0) = 0\}$. On munit X de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Soit u définie sur X par

$$u(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \text{ pour} & x \neq 0 \\ 0 \text{ en } 0 \end{cases}$$

1)

1a) Montrer que u est une application linéaire continue de X dans X. Montrer que sa norme est inférieure ou égale à 1.

1b) Soit la suite

$$f_n(x) = \begin{cases} nx \text{ si } x < \frac{1}{n} \\ 1 \text{ si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

Représenter graphiquement f_n.

1c) Montrer que $||f_n||_\infty = 1$.

1d) Calculer $|u(f_n)|(1)$.

1e) Rappeler la définition de la norme d'une application linéaire continue. En déduire que

$$||u|| = 1.$$

2) On veut montrer qu'il n'existe pas de f non identiquement nulle telle que

$$||u(f)||_\infty = ||f||_\infty.$$

Pour cela on suppose par l'absurde qu'un tel f existe.

2a) Soit $g = \frac{f}{||f||_\infty}$. Remarquer que $g \in X$ et est de norme 1, et $||u(g)|| = 1$.

2b) Montrer que $h = |g|$ est aussi dans X , est à valeurs positives ou nulles et $||u(h)|| = 1$.

2c) Montrer qu'il existe $x_o \neq 0$ tel que $\int_0^{x_o} h(t)dt = x_o$. Conclure.

Exercice 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue.

2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Calculer sa différentielle sur ce domaine.

3) Calculer

$$\lim_{h\to 0, h>0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

et

$$\lim_{h\to 0, h<0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x - y + 1$.

1) Calculer en le (ou les) point (s) critique(s) de f.

2) Calculer la matrice de $D^2 f$ en le (ou les) point (s) trouvés.

3) Trouver les extrema et calculer le minimum de la fonction. Quel est le maximum de la fonction?

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{C}_0^2([0,1]) = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1]), f(0) = f'(0) = 0\}$.

1) Montrer que $||f''||_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f''|(x)$ est une norme sur $\mathcal{C}_0^2([0,1])$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}_0^2([0,1])$,

$$|f|_\infty \leq |f'|_\infty \leq |f''|_\infty$$

On admet que $\mathcal{C}_0^2([0,1])$ est un espace de Banach, muni de cette norme.

2) Soit $g \in \mathcal{C}([0,1])$. Montrer qu'il existe un et un seul $h \in \mathcal{C}_0^2([0,1])$ qui satisfait $h''(x) + h'(x) = g(x)$ pour $x \in]0,1[$.

(On pourra multiplier par e^x l'équation).

3) Montrer que l'application qui à g associe h est linéaire continue de $\mathcal{C}([0,1])$ sur $\mathcal{C}_0^2([0,1])$.

4) On considère pour $f \in \mathcal{C}_0^2([0,1])$, l'application

$$\phi(f) = f'' + f' + f^3.$$

Montrer que ϕ est différentiable sur $\mathcal{C}_0^2([0,1])$, à valeurs dans $\mathcal{C}([0,1])$. Calculer sa différentielle.

5) Montrer que $D\phi(0)$ est un homéomorphisme de $\mathcal{C}_0^2([0,1])$ sur $\mathcal{C}([0,1])$. En déduire, en utilisant le théorème d'inversion locale qu'il existe un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}_0^2([0,1])$ sur lequel ϕ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathcal{C}_0^2([0,1])$ sur un voisinage de 0 dans $\mathcal{C}[0,1]$.