Licence L3
Méthodes Variationnelles
decembre 2009, 3 heures

Université de Cergy-Pontoise
Examen Mathématiques

1. Soit $a > 0$ et considérons la fonction $f(x, y) = x\ y(a + x - y)$.
   (a) Esquisser les 3 ensembles suivants (faire 3 dessins) :
      i. L'ensemble des points (x, y) tels que $x\ y \geq 0$.
      ii. L'ensemble des points (x, y) tels que $a + x - y \geq 0$.
      iii. L'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) \geq 0$.
   (b) Déterminer les points critiques de f.
   (c) Déterminer pour chaque point critique s'il s'agit d'un maximum/minimum local.
   (d) Discuter le lien entre le dessin (iii.) et les réponses aux questions (b) et (c).

2. On considère l'équation $x = a\ \sin(x)$, pour $a > 1$.
   (a) Montrer (à l'aide d'un dessin) que pour tout $a > 1$ il existe une solution $0 < x(a) < \pi$.
   (Question bonus - mais plus difficile : Montrer que ce point est unique).
   (b) Trouver un développement limité de $x(a)$ d'ordre 2 en $a = \dfrac{\pi}{2}$. (Indication : $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$.)

3. Déterminer le maximum de $f(x, y) = x + y$ sous la contrainte $g(x, y) = x^2 + \dfrac{y^2}{2} + xy - 8 = 0$.

4. On considère l'espace des matrices carré de taille 2 fois 2, $E = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, muni d'une norme matricielle.
   (a) Montrer que l'application $f(A) = A^2$ est différentiable et déterminer une expression pour son application dérivée.
   (b) Soit $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ et calculer la matrice $f'(A).H$ pour $H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \in E$.
   (c) Pour cette même matrice diagonale montrer que $f'(A)$ est inversible si et seulement si λ_1, λ_2 et $\lambda_1 + \lambda_2$ sont tous non-zeros. Décrire explicitement l'inverse de $f'(A)$ dans ce cas.
   (d) Montrer que l'on peut résoudre l'équation $A^2 = B$ avec B dans un voisinage de $B_0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soit l'application, $f(y) = \displaystyle\int_0^1 \big(y(x)\ \ y'(x)\big)^2\ dx, \qquad y \in C^1([0, 1]),\ \ y(0) = 1,\ \ y(1) = \sqrt{3}.$
   (a) Montrer que f est différentiable en y.

   On suppose que y est un 'point' critique de f.

   (b) À l'aide de l'invariant de Hamilton, déterminer une équation différentialle de 1ère ordre pour y.
   (c) Déterminer y sous les contraintes données.