Licence L3
Méthodes Variationnelles
decembre 2008, 3 heures

Université de Cergy-Pontoise
Examen Mathématiques

1. Soient a et b deux nombres réels et considérons l'équation en 3 variables réelles :
$$z^3 + z(a + xy) + x^2 - y^2 + b = 0.$$
   (a) Trouver les valeurs du couple a, b telle que cette équation permette de déterminer z comme fonction implicite de x, y au voisinage du point $(x, y, z) = (-2, 3, 2)$. On note $g(x, y)$ cette fonction implicite. (Justifier vos calculs)

   (b) Déterminer $\partial g/\partial x$ et $\partial g/\partial y$ en ce point (et en fonction de a et b).

2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles $n \times n$, muni de la norme matricielle $\|M\| = \sup\{\|Mx\|_\infty : x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \leq 1\}$. Soit $A, B \in E$. On note $\mathbf{1}$ la matrice identité dans E.

   (a) Soit $(\mathbf{1} - tA)^{-1}$ une fonction de la variable réelle, t. Montrer que cette fonction est bien définie si $|t| < 1/\|A\|$ et donner une majoration pour sa norme en fonction de t et de $\|A\|$.

   (b) Montrer que $(\mathbf{1} - tA)^{-1}$ est différentiable et déterminer une formule pour sa dérivée. (Justifier)

   (c) Supposons que la matrice $B - tA$ est inversible pour $t = t_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que $M(t) = (B - tA)^{-1}$ est différentiable en $t = t_0$ et déterminer une formule pour sa dérivée.

3. Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0, \dots, x_n > 0\}$ (ouvert dans $\mathbb{R}^n$) et définir
$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \cdots x_n)^{1/n}, \ x \in \Omega.$$
   Soit $a \in \Omega$ et considérer la contrainte $g(x) = (x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n) - 1 = 0$. À l'aide d'un multiplicateur de Lagrange déterminer le maximum de f dans Ω sous la contrainte $g = 0$. (Justifier)

4. Soit $E = C^1([0, 1])$ muni de la norme $\|y\|_{C^1} = \max\{|y|_\infty, |y'|_\infty\}$.
   Soit $\mathcal{A} = \{ y \in E \mid y(0) = e, y(1) = 0\}$ et soit l'application, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, définie par :
$$f(y) = \int_0^1 \left(y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\, y\, e^x \right) dx, \quad y \in \mathcal{A}.$$
   On suppose que $y \in \mathcal{A}$ est un point critique de f.

   (a) Montrer que f est différentiable en y.

   (b) Déterminer une équation différentialle de deuxième ordre pour y.

   (c) Déterminer y.