Université de Cergy Pontoise **L3-Méthodes Variationnelles**
Mathématiques juillet 2008, 2ème session. Durée : 2 heures

Toute forme de calculatrices et notes sont interdites.

---

1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Soit $f(x,y,z) = \dfrac{2x+z^2}{1+z} - 2 + \sin(y-x)$.

   (a) Décrire la domaine de définition Ω de f et montrer que f est $C^1(\Omega)$.

   (b) Déterminer la dérivée de f en $x \in \Omega$ dans une direction $h \in E$.

   (c) Montrer que l'équation $f(x,y,z) = 0$ donnera lieu à une fonction implicite $z = \phi(x,y)$ qui passe par le point $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,0)$. (Justifier)

   (d) Déterminer un $DL_2((x_0, y_0))$ de ϕ.

2. Soit $f(x,y,z) = 4xy + yz + zx$. Utiliser un multiplicateur de Lagrange pour déterminer un point extremal pour f sous la contrainte $x, y, z > 0$ et $xyz = 32$.

3. Notons $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace de matrices carrées de taille n fois n muni d'une norme matricielle quelconque. Notons $\Omega = GL_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de matrices inversibles. Montrer que si A est un point critique pour la fonction $f(A) = \mathrm{tr}(A^{-1} + A)$, $A \in \Omega$ alors $A^2 = \textit{id}$.

   (Notation $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$ et *id* est la matrice identité).

4. Soit $E = C^1([0,T])$ muni de la norme $\|y\|_{C^1} = \max\{|y|_\infty, |y'|_\infty\}$ Soit $-1 < a, b < 1$.
   Notons $\mathcal{A} = \{y \in E \,|y(0) = a,\ y(T) = b,\ \text{et}\ \forall t \in [0,T] : -1 < y(t) < 1\}$ et
   $E_0 = \{h \in E : h(0) = h(T) = 0\}$. Soit

   $$f(y) = \int_0^T \frac{y'(x)^2}{1 - y(x)^2}\, dx, \quad y \in \mathcal{A}.$$

   (a) Montrer que f est différentiable en $y \in \mathcal{A}$ et déterminer une expression pour la dérivée $(f'(y)).(h)$, dans une direction $h \in E_0$.

   (b) A l'aide de l'invariant de Hamilton trouver un point critique de f

   (c) Que ce passe-t-il si on essaye avec $a = -1$ et $b = +1$?
