Licence L3
Méthodes Variationnelles
janvier 2007, 3 heures

Université de Cergy-Pontoise
Examen Mathématiques

1. (5 points)
   (a) Montrer qu'il y a un voisinage de $(u,z)=(1,2)$ tel que l'équation $u^3-3\,z\,u+5=0$ admette une unique solution $u=\phi(z)$ de classe C^1 satisfaisant $\phi(z)=1$.
   (b) Déterminer un DL_2 de ϕ en $z=2$.
   (c) Soit $g(z)=\phi(z)-z\,\phi'(2)$. Déterminer si g admet un max/min local en $z=2$. (Justifier)

2. (5 points) Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $|x|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|\}$, $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. Noton $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles 2×2, muni de la norme matricielle $\|M\|=\sup\{|Mx|_\infty : |x|_\infty\leq 1\}$.

   Soit $U=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ c & 2 \end{pmatrix}$ avec $c\in\mathbb{R}$ et notons $\phi(A)=A^3+A\,U,\ A\in E$.
   (a) Calculer la norme de U en fonction de $c\in\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que ϕ est différentiable au sens du cours en tout $A\in E$ et déterminer sa dérivée dans une direction $H\in E$.
   (c) Supposons que $A=A_0$ est un point critique de l'application $A\in E\mapsto \mathrm{tr}\,(\phi(A))\in\mathbb{R}$. Montrer que A_0 vérifie l'équation matricielle $3(A_0)^2+U=0$.

3. (5 points) Soit $f(x,y)=x^2y$ et $g(x,y)=x^2+y^2-3$.
   À l'aide d'un multiplicateur de Lagrange déterminer le maximum de f sous la contrainte $g=0$. (Justifier)

4. (5 points) Soit $E=C^1([1,2])$ muni de la norme $\|y\|_{C^1}=\max\{|y|_\infty,|y'|_\infty\}$.
   Soit $\mathcal{A}=\{y\in E\,|y(1)=3, y(2)=8\}$ et $E_0=\{h\in E: h(1)=h(2)=0\}$. Soit
   $$\phi(y)=\int_1^2\frac{y'(x)^2}{x^3}\,dx,\ \ y\in\mathcal{A}.$$
   (a) Montrer que ϕ est différentiable en $y\in\mathcal{A}$ et déterminer une expression pour la dérivée $(\phi'(y)).(h)$, dans une direction $h\in E_0$.
   (b) (Question du cours :) On suppose que $y\in\mathcal{A}$ est un point critique de ϕ et que y est de classe C^2. En déduire que y vérifie l'équation d'Euler-Lagrange.
   (c) Déterminer un point critique de ϕ.
   (d) A l'aide de l'invariant de Hamilton trouver un point critique de $\displaystyle\int_1^2\frac{y'(x)^2}{y(x)^3}\,dx,\ \ y\in\mathcal{A},\ y>0.$