1. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la norme : $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x_1 + \sqrt{x_2^2 + x_3^2})$. Notons $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 > 0\}$.

   (a) (2) Montrer que f est $C^1(\Omega)$ et décrire sa dérivée en $x \in \Omega$ dans une direction $h \in E$.

   (b) (1.5) Calculer la norme de $f'(a)$ au point $a = (0, \frac{\pi}{2}, 0)$.

   (c) (1.5) Y a-t-il des points $x \in E \setminus \Omega$ tels que f soit dérivable en x ? (Justifier)

2. Soient les fonctions $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 1$ et $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

   (a) (1.5) Montrer que la contrainte $g(x, y, z) = 0$ est régulière.

   (b) (2) En utilisant un multiplicateur de Lagrange, déterminer les valeurs extremales de $f(x, y, z)$ liées à la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

   (c) (1.5) Est-ce que f admet une valeur maximale/minimale globale sur l'ensemble $\{g(x, y, z) = 0\}$? (Justifier)

3. Soit $f(x, y, z) = 2xz + y + z^4$.

   (a) (2) Montrer que l'équation $f(x, y, z) = 0$ détermine une fonction implicite $z = \phi(x, y)$ de classe (au moins) C^1 dans un voisinage de $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$.

   (b) (3) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de ϕ en $(1, 0)$.

4. Notons $E = M_3(\mathbb{R})$ l'espace de matrices carrées de taille 3 fois 3. Notons $D = GL_3(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de matrices inversibles. Munissons E de la norme matricielle : $\|A\|^2 = \sum_{i,j} A_{ij}^2$. On note tr$A = \sum_i A_{ii}$ la trace de $A \in E$. Soit $f(X) = \mathrm{tr}(X^2 + 2\,X^{-1})$, $X \in D$.

   (a) (1.5) Montrer que $X \in E \mapsto X^2 \in E$ est différentiable aux sens du cours et déterminer une formule pour sa dérivée.

   (b) (1.5) Déterminer une formule pour la dérivée de f (Justifier).

   (c) (1) Montrer que la matrice identité est un point critique de f.

   (d) (1) Déterminer une équation matricielle verifiée par un point critique X de f (Justifier). Montrer que toute valeur propre de X est une racine 3ème de l'unité.