1. (6 points) Soit $f(x, y, z) = \exp(5\,z + 5\,y) + \sin(2\,z + 3\,x) - 1$.

   (a) Montrer qu'il y a un voisinage de $(0, 0, 0)$ tel que l'équation $f(x, y, z) = 0$ admet une unique solution $z = g(x, y)$ de classe C^1 satisfaisant $g(0, 0) = 0$.

   (b) Déterminer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

2. (8 points) On note $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ le produit scalaire habituelle sur $\mathbb{R}^3$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme euclidienne. Soit $N \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de norme un. Le plan $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, N\rangle = 0\}$ sépare $\mathbb{R}^3$ en deux parties ouvertes que l'on note H_1 et H_2. Fixons deux points $A_1 \in H_1$, $A_2 \in H_2$ et deux constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et définissons

   $$f(x) = c_1\|x - A_1\|_2 + c_2\|x - A_2\|_2, \;\; x \in \mathbb{R}^3.$$

   Lorsque $x \in \Sigma$ on note α_1 (et α_2) l'angle entre $A_1 - x$ (respectivement $A_2 - x$) et la droite passant par x et de vecteur directeur N (voir figure).

   (a) Montrer que $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \langle x, x\rangle$ ainsi que $x \in (\mathbb{R}^3)^* \mapsto \|x\|_2$ sont différentiables et déterminer leurs applications dérivées.

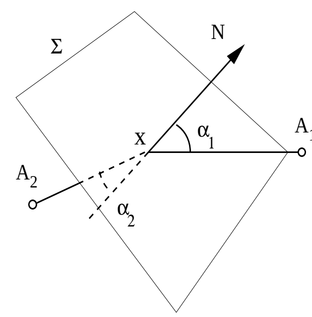
   (b) Déterminer l'application dérivée de f en $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{A_1, A_2\}$.

   (c) Soit $g(x) = \langle x, N\rangle$, $x \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $g(x) = 0$ est une contrainte régulière.

   (d) Montrer que $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ admet un point minimal, $p \in \Sigma$.

   (e) Déterminer (sans résoudre) à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange une équation sous forme vectorielle pour p (et le multiplicateur).

   (f) En déduire qu'en ce point on a : $c_1 \sin\alpha_1 = c_2 \sin\alpha_2$.



3. (6 points) Soit $E = C^1([-1, 1])$ muni de la norme habituelle $\|y\|_{C^1} = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty$. Soit $\mathcal{E} = \{y \in E \mid y(x) > 0,\ \forall x \in [-1, 1]\}$. On définit $f(y) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{y(x)}\, dx$ pour $y \in \mathcal{E}$.

   (a) Montrer que f est différentiable en $y \in \mathcal{E}$ et déterminer une expression pour $(f'(y)).(\delta y)$, la dérivée de f en $y \in E$ dans une direction $\delta y \in E_0 \equiv \{\delta y \in E : \delta y(-1) = \delta y(1) = 0\}$.

   Supposons dorénavant que $y \in \mathcal{E}$ est un point critique de f avec les contraintes $y(-1) = y(1) = 1$.

   (b) En utilisant l'invariant de Hamilton, trouver une équation différentielle, d'ordre 1 pour y.

   (c) Construire une solution comme courbe paramétrée : $x(t) = a + r\sin t$, $y(t) = b + r\cos t$, où a, b et r sont des constantes à déterminer et pour t appartenant à un intervalle à preciser.