Examen compléments d'analyse 15 Décembre 2008

Exercice 1 : Soit la fonction impaire et 2π périodique, définie sur $]0,\pi[$ par

$$f(t) = \pi t - t^2.$$

Calculer sa série de Fourier.
Calculer la somme $\sum_0^\infty \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.
Calculer $\sum_0^\infty \frac{1}{(2p+1)^6}$, puis $\sum_1^\infty \frac{1}{p^6}$.

Exercice 2 :
Dans cet exercice, pour chacune des fonctions dont on demande de calculer la transformée de Fourier on montrera que la fonction est dans $L^1(\mathbb{R})$.
On rappelle que la transformée de Fourier de $e^{-|x|}$ est $\frac{2}{1+4\pi^2x^2}$.
En déduire la transformée de Fourier de $xe^{-|x|}$ puis celle de $x^2e^{-\pi|x|}$.
En déduire aussi la transformée de Fourier de $\frac{1}{1+x^2}$ puis celle de $\frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 3 :
Résoudre l'équation différentielle

$$y^{"} - 3y' + 2y = t\sinh t$$

Puis l'équation

$$y^{(3)} - 3y^{"} + 3y' - y = e^{2t} + e^t$$