# Examen final Complements d'analyse, janvier 2008

Exercice 1 :

On considère la fonction

$$f(x) = e^x$$

définie sur $]0, \pi[$ et prolongée par imparité.

Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Calculer sa série de Fourier.

Calculer

$$\sum_0^\infty \frac{(2k+1)(-1)^k}{(1+(2k+1)^2)}$$

Calculer

$$\sum_0^\infty \left(\frac{(2k+1)}{(1+(2k+1)^2)}\right)^2$$

Exercice 2 :

Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = e^{-3|x|},$$

après avoir montré qu'elle appartient à l'espace $L^1(\mathbb{R})$. En déduire la transformée de Fourier de $x \mapsto xf(x)$.

Déduire de la formule d'inversion de Fourier la transformée de Fourier de $g$ définie par $g(x) = \frac{1}{9+4\pi^2x^2}$

Exercice 3 :

Résoudre l'équation différentielle

$$y^{"} + 7y' + 12y = 0$$

Puis

$$y^{"} + 7y' + 12y = e^{-3t} + e^{t}$$

Exercice 4 :

On considère la fonction

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 1 & \text{sur } [0, \infty[ \\ 0 & \text{sur } ]-\infty, 0[ \end{cases}$$

Calculer l'abscisse de convergence $\sigma(f)$, donner le domaine $I(f)$ de définition de la transformée de Laplace.

Calculer la transformée de Laplace $F(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 1 :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^x \sin(px)dx \\ &= \frac{2}{2i\pi}[\frac{e^{x(1+ip)}}{1+ip} - \frac{e^{x(1-ip)}}{1-ip}]_0^{\pi} \\ &= \frac{1-e^{\pi}(-1)^p}{\pi(1+p^2}p \end{aligned}$$

En prenant le point $\pi/2$ on obtient

$$e^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1+e^{\pi}}{\pi}\sum_0^{\infty}\frac{(2k+1)(-1)^k}{(1+(2k+1)^2}$$

En utilisant Bessel parseval

Exercice 2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(\lambda) &= \int_{\mathrm{I}} \mathrm{R} e^{-3|x|}e^{2i\pi\lambda x} \\ &= \frac{6}{4\pi^2\lambda^2+9} \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(xf) = \frac{-1}{2i\pi}\mathcal{F}(f)'(\lambda) = \frac{48\pi^2\lambda}{9+4\pi^2\lambda^2}$$

Exercice 3 :

$y = C_1e^{-3t} + C_2e^{-4t}$

Une solution particulière pour l'equation avec le second membre $e^t$ est $\frac{1}{20}e^t$ Pour le sec ond membre $e^{-3t}$ on trouve $\frac{t}{13}e^{-3t}$ Finalement

$$y = a^{-3t} + be^{-4t} + \frac{t}{13}e^{-3t} + \frac{1}{20}e^t$$