Examen final Complements d'analyse

Exercice 1 :

On rappelle qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit discret c'est à dire de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$, soit partout dense dans $\mathbb{R}$, (tel que l'ensemble de ses points adhérents est $\mathbb{R}$ tout entier).

Soient a et b deux réels. On considère le sous-groupe additif engendré par a et b c'est à dire le sous-ensemble de $\mathbb{R}$, noté $G(a,b)$

$$G(a,b) = \{na + mb, n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}\}$$

Montrer que $G(a,b)$ est discret si et seulement si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas on montrera que si $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{p}{q}$ avec p, q dans $\mathbb{N}$ et p et q premiers entre eux, le sous groupe $G(a,b) = \frac{a}{p}\mathbb{Z}$.

2) En admettant que π est irrationnel, en considérant $G(1, 2\pi)$ et le fait que cos est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1,1]$ en déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 :

Calculer la série de Fourier de la fonction 2π périodique égale à $\pi^2 t - t^3$ sur $]-\pi,\pi[$

En déduire le calcul de la somme

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^p \pi}{(2p+1)^3}$$

En déduire

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^6}$$

puis $\sum_0^\infty \frac{1}{(2p+1)^6}$

Exercice 3 : Résoudre l'equation differentielle

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 4y = te^{t} + e^{2t}$$

Exercice 5:
On considère l'équation différentielle

$$y' = y + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}y^2 + e^{\frac{-t}{2}}$$

Montrer que $-e^{\frac{-t}{2}}$ est une solution particulière. Résoudre ensuite l'équation.

bareme sur 30 points

Exercice 1 sur 8 points

Si $G(a,b)$ est discret, $a/b \in \mathbb{Q}$: 2 points pour ecrire

$$a = na + mb$$

car l'element qui engendre le sous groupe appartient au sous groupe donc est de la form $na + mb$

Si $a/b \in \mathbb{Q}$, 2 points pour utiliser Bezout : il existe r et s dans N tels que $pr - qs = 1$ 1 point pour conclure

2 points pour dire que cos etant surjective l'image d'une partie dense est dense. 1 point pour la conclusion : $\cos(n + 2m\pi) = \cos n$ est d'adhérence $[-1, 1]$

Exercice 2 sur 9 points

3 points pour le calcul de b_n.

1 point pour enoncer Dirichlet , 1 point pour verifier que la fonction est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Un point pour prendre le point $\pi/2$ et conclure.

1 point pour enoncer Bessel parseval. Un point pour le calcul de $\int |f|^2$ et la conclusion.

1 point pour la dernier somme.

exercice 3 sur 7 points

2 points pour resoudre l'equation caracteristique. 1 point pour la resolution de l'EESM

Un point pour dire que on cherche deux solution particulieres de la forme

$$at^2e^t$$

et te^{2t} 2 points pour chaque calcul.

Exercice 4 6 points

1 point pour verifier que $e^{-t/2}$ est solution

2 points pour trouver l'equation de Bernouilli associee.

Deux points pour la resoudre. Un point pour la conclusion.